KVANTNA MEHANIKA

Zadaci za vježbe 9. 6. 2025.

22 Teorija raspršenja. Bornova aproksimacija

22.1 Upotrijebite Bornovu aproksimaciju da izračunate diferencijalni $d\sigma/d\Omega$ i totalni udarni presjek σ_{tot} za centralni Gaussov potencijal oblika

$$V(r) = \frac{V_0}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{r^2}{4a^2}}$$

Usporedite vaš rezultat sa diferencijalnim presjekom za Yukawa-in potencijal

$$V(r) = \frac{V_0 a}{r} e^{-r/a}$$

22.2 Za potencijal oblika $V(r) = V_0 R \delta(r - R)$ izračunajte amplitudu raspršenja $f(\theta)$ i diferencijalni udarni presjek $d\sigma/d\Omega$ u Bornovoj aproksimaciji. Odredite granice valjanosti vašeg računa za niske i visoke energije.

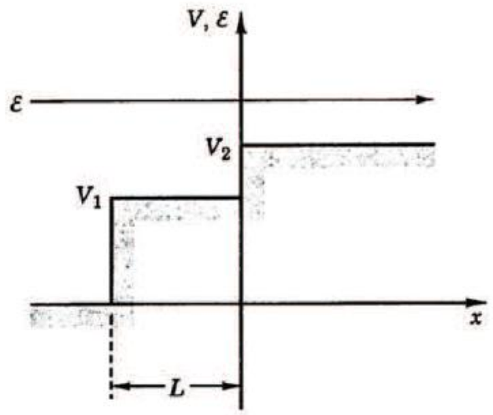
23.3 Dokažite sljedeću tvrdnju: promatramo raspršenje na periodičnom potencijalu $V(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = V(\mathbf{r})$ gdje je $\mathbf{R}$ konstantan vektor. Tada je amplituda raspršenja u Bornovoj aproksimaciji uvijek jednaka nuli osim u slučaju da je ispunjen uvjet $\mathbf{q} \cdot \mathbf{R} = 2\pi n$, n je cijeli broj.

22.4 Iskoristite integralnu Schrödingerovu jednadžbu da nađete uvjet za valjanost prve Bornove aproksimacije. Primijenite dobiveni uvjet na problem sferne potencijalne jame radijusa R

$$V(r) = \begin{cases} V_0 \,;\, r < R \\ 0 \,;\, r > R \end{cases}$$

i procijanite valjanost Bornove aproksimacije za visoke i niske energije.

22.5 Razmotrite raspršenje na potencijalu prikazanom na slici.



Nađite V_1 i L tako da se česticima upadne energije $\mathcal{E}$ potpuno spriječi refleksija na potencijalu V_2 . Ovo je kvantno-mehanička verzija anti-refleksivnog sloja u valnoj optici.

22.6 (a) Nađite Greenovu funkciju za 1D Schrödingerovu jednadžbu i pokažite da je, analogno postupku u 3D, integralni oblik Schrödingerove jednadžbe oblika

$$\psi(x) = u(x) - \frac{im}{\hbar^2 k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x-x'|} V(x') \psi(x') \, dx'$$

(b) Izvedite izraz za Bornovu aproksimaciju postavljajući $u(x) = \mathrm{e}^{ikx}$, te $\psi(x) \approx u(x)$. Pokažite da je koeficijent refleksije

$$R \approx \left(\frac{m}{\hbar^2 k}\right)^2 \left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{2ikx} V(x)\mathrm{d}x\right|^2$$

(c) Koliki je koeficijent refleksije u problemu s potencijalom $V(x) = -\alpha\delta(x)$? Usporedite s točnim rezultatom

$$R = \frac{1}{1 + \frac{2\hbar^2 E}{m\alpha^2}}$$

22.1

Gaussov potencijal

$$V(r)=\frac{V_0}{\sqrt{4\pi}}\,e^{-\frac{r^2}{4a^2}}$$

Amplituda raspršenja u Bornovoj aproksimaciji

$$f(\theta)=-\frac{2m}{\hbar^2 q}\int_0^\infty \sin(qr)V(r)\cdot r\,dr=-\frac{2m}{\hbar^2 q}\cdot\frac{V_0}{\sqrt{4\pi}}\int_0^\infty \underbrace{\sin(qr)}_{u}\underbrace{e^{-\frac{r^2}{4a^2}}r\,dr}_{dv}$$

$$=-\frac{2m}{\hbar^2 q}\cdot\frac{V_0}{\sqrt{4\pi}}\left\{\underbrace{\sin(qr)\cdot(-2a^2)e^{-\frac{r^2}{4a^2}}\Big/_0^\infty}_{=0}+2a^2q\int_0^\infty\cos(qr)\,e^{-\frac{r^2}{4a^2}}dr\right\}$$

$$=-\frac{2m}{\hbar^2 q}\cdot\frac{V_0}{\sqrt{4\pi}}\cdot 2a^2q\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2\cdot\frac{1}{2a}}\,e^{-\frac{q^2}{4\cdot\frac{1}{4a^2}}}$$

$$=-\frac{2mV_0a^3}{\hbar^2}\,e^{-q^2a^2}$$

$\vec{q}=\vec{k}'-\vec{k}$; $k=k'$

$q=2k\sin\theta/2$

Udarni presjek

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=|f(\theta)|^2=\frac{4m^2|V_0|^2a^6}{\hbar^4}e^{-2q^2a^2}$$

Za Yukawin potencijal

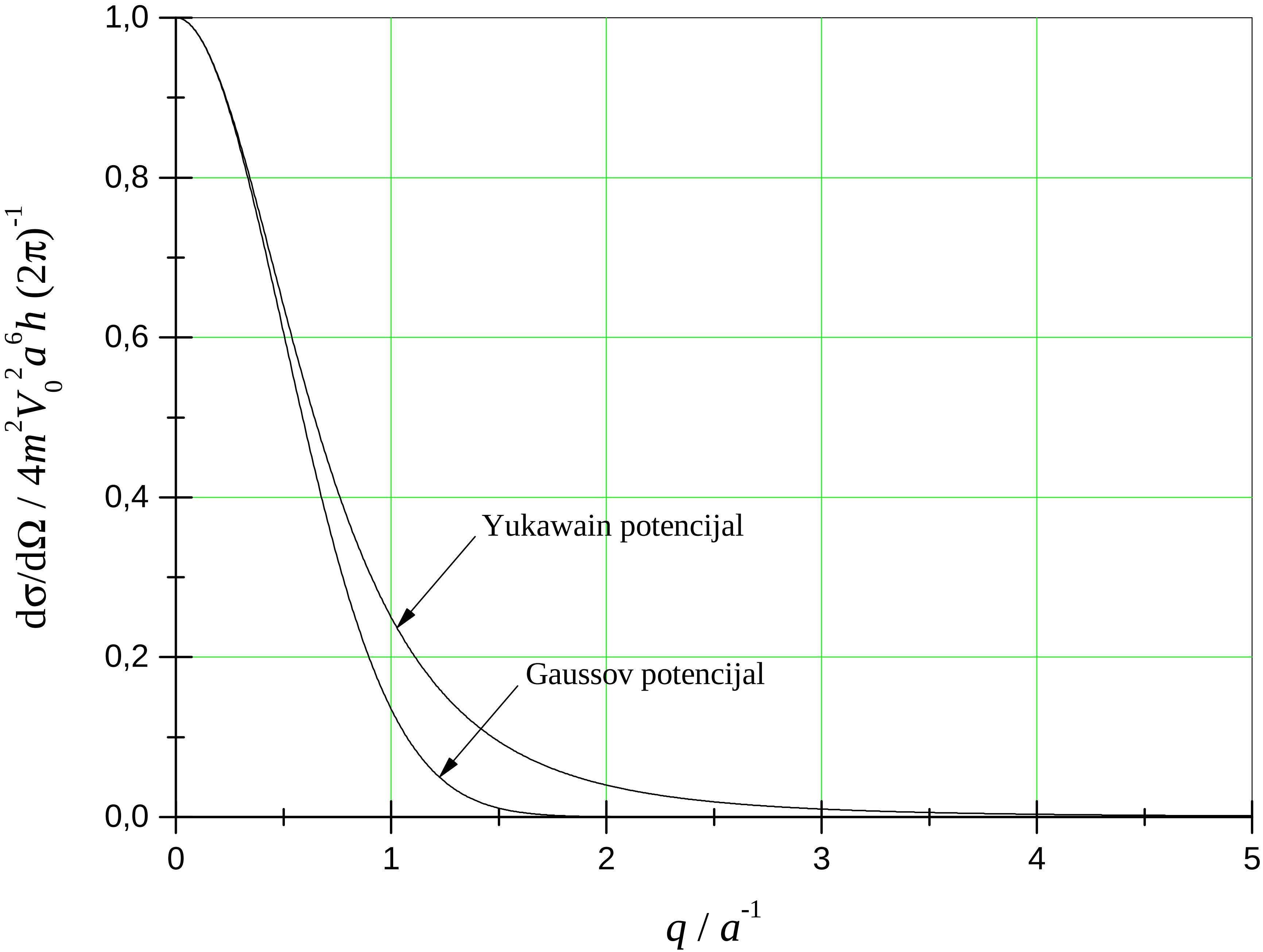
$$V=V_0a\frac{e^{-r/a}}{r}$$

udarni presjek glasi [na predavanjima!]

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{yukawa}}=\frac{4m^2|V_0|^2a^6}{\hbar^4}\cdot\frac{1}{[1+a^2q^2]^2}$$

Na grafu su nacrtani udarni presjeci. $d\sigma/d\Omega$ nacrtan je u jedinicama od $\frac{4m^2|V_0|^2a^6}{\hbar^4}$, a q u jedinicama od a^{-1}.

Za $q\cdot a\ll 1$ udarni presjeci se podudaraju. Za mali prijenos impulsa ($\vec{q}=\vec{k}'-\vec{k}$), odnosno za velike udaljenosti od mete, pojedinosti kratkodosežnih potencijala nisu važne.


dσ/dΩ / 4m²V₀²a⁶h (2π)⁻¹
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
0
1
2
3
4
5
q / a⁻¹
Yukawain potencijal
Gaussov potencijal

22.2

Delta-potencijal

$$V(r) = V_0 R\,\delta(r-R)$$

Amplituda raspršenja u Bornovoj aproksimaciji

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2 q}\int_0^\infty r\sin(qr)\,V(r)\,dr$$

$$= -\frac{2mV_0R}{\hbar^2 q}\int_0^\infty r\sin(qr)\,\delta(r-R)\,dr$$

$$= -\frac{2mV_0R^2}{\hbar^2 q}\sin(qR)$$

Diferencijalni udarni presjek

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{4m^2V_0^2R^4}{\hbar^4 q^2}\sin^2(qR)$$

Iz zadatka 22.4 imamo uvjet valjanosti Bornove aproksimacije

$$\frac{m}{2\pi\hbar^2}\left|\int \frac{e^{ikr'}}{r'}V(\vec{r}')e^{ikz'}d^3r'\right| \ll 1$$

ovo ne!

Integral po θ daje

$$\int_0^\pi d\theta'\sin\theta' e^{ikr'\cos\theta} = \frac{2}{kr'}\sin(kr')$$

Imamo

$$\frac{m}{2\pi\hbar^2}\cdot|V_0|R\cdot 2\pi\int_0^\infty dr\cdot r'\cdot e^{ikr'}\cdot\frac{2}{kr'}\sin(kr')\,\delta(r-R)$$

$$= \frac{2m|V_0|R}{\hbar^2 k}\sin(kR)\cdot\underbrace{|e^{ikR}|}_{=1}$$

$$\frac{2m|V_0|R}{\hbar^2 k}\sin(kR) \ll 1 \qquad (*)$$

Niske energije: $kR \ll 1$; $\sin kR \simeq kR$

$$\frac{2m|V_0|R^2}{\hbar^2} \ll 1$$

Dakle potencijal mora biti slab ($|V_0|$ mali) i kratkog dosega (R mali)

Za $KR \gg 1$ ne možemo ništa pojednostaviti u formuli (*)

$$\frac{2m|V_0|R}{\hbar^2 K} \sin(KR) \ll 1$$

Ipak, ovaj uvjet kaže da za veće energije (veći K) imamo bolju valjanost Bornove aproksimacije.

$\boxed{22.3}$

$$f = -\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{2m}{\hbar^2}\int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\,V(\vec{r})\,d^3r$$

Integral je jednak

$$\int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\,V(\vec{r})\,d^3r = \int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\,V(\vec{r}+\vec{R})\,d^3r$$

$$[\vec{r}+\vec{R}=\vec{r}\,']$$

$$= \int e^{-i\vec{q}\cdot(\vec{r}\,'-\vec{R})}\,V(\vec{r}\,')\,d^3r'$$

$$= e^{i\vec{q}\cdot\vec{R}}\int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}\,'}\cdot V(\vec{r}\,')\,d^3r'$$

Imamo,

$$\left[1-e^{i\vec{q}\cdot\vec{R}}\right]\int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\,V(\vec{r})\,d^3r = 0$$

1. $\int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\,V(\vec{r})\,d^3r = 0$ amplituda raspršenja jednaka je nuli!

2. $e^{i\vec{q}\vec{R}} = 1 \Rightarrow \vec{q}\cdot\vec{R} = 2\pi n;\ n\in\mathbb{Z}$

Ako je ispunjen drugi uvjet, amplituda raspršenja ne mora biti jednaka nuli.

$\boxed{22.4}$ Integralna Schrödingerova jednadžba za raspršenje

$$\psi(\vec r) = Ae^{ikz} - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \frac{e^{ik|\vec r-\vec r\,'|}}{|\vec r-\vec r\,'|} V(\vec r\,')\psi(\vec r\,')\, d^3r'$$

Primijetimo da gornja jednadžba vrijedi posvuda [dakle, ne treba ju miješati sa asimptotskim rješenjem].

Bornova aproksimacija glasi: $\psi(\vec r) \to Ae^{ikz}$ (postavili smo $\vec k = k\vec e_z$)

Drugim riječima, Bornova aproksimacija pretpostavlja da u području gdje je potencijal velik, valna funkcija ne smije se previše razlikovati od ravnog vala. To će biti zadovoljeno ako je za $\vec r = 0$ prvi član u gornjoj jednadžbi puno veći od drugog člana

$$|Ae^{ikz}| \gg \frac{m|A|}{2\pi\hbar^2}\left|\int \frac{e^{ikr'}}{r'} V(\vec r\,') e^{ikz'} d^3r'\right|$$

ili

$$\frac{m}{2\pi\hbar^2}\left|\int \frac{e^{ikr'}}{r'} V(\vec r\,') e^{ikz'} d^3r'\right| \ll 1$$

Za sfernu potencijalnu jamu ovaj se uvjet može izračunati

$$\frac{m}{2\pi\hbar^2}\left|\int \frac{e^{ikr'}}{r'} V_0 e^{ikz'} d^3r'\right| \ll 1$$

$$\int \frac{e^{ikr'}}{r'} e^{ikz'} d^3r' = \int_0^R dr' r' e^{ikr'} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} d\theta' \sin\theta' e^{ikr'\cos\theta'}$$

$$\int_0^{\pi} d\theta' \sin\theta' e^{ikr'\cos\theta'} = \frac{(-1)}{ikr'} e^{ikr'\cos\theta'}\Big/_0^{\pi} = \frac{1}{ikr'}\left(e^{ikr'} - e^{-ikr'}\right)$$

$$\int_0^R dr'\left(e^{2ikr'} - 1\right)\cdot\frac{2\pi}{ik} = \frac{2\pi}{ik}\left[\frac{e^{2ikr'}}{2ik}\Big/_0^R - R\right]$$

$$= \frac{2\pi}{ik}\left[\frac{1}{2ik}\left(e^{2ikR} - 1\right) - R\right]$$

Dobijamo

$$\frac{m}{2\pi\hbar^2}\cdot |V_0|\cdot \frac{2\pi}{k^2}\left| \frac{1}{2i}\left(e^{2ikR}-1\right)-kR\right| \ll 1$$

Za niske energije; $kR \ll 1$

$$e^{2ikR} = 1+2ikR+\frac{1}{2}(2ikR)^2$$

Apsolutna vrijednost

$$|\qquad| = 2k^2R^2$$

$$\frac{2m|V_0|}{R^2\hbar^2} \ll 1 \Rightarrow$$ potencijal ne smije biti jak; u protivnom može se desiti vezano stanje.

Za visoke energije; $kR \gg 1$

$$\frac{e^{2ikR}-1}{2i} = e^{ikR}\sin kR$$

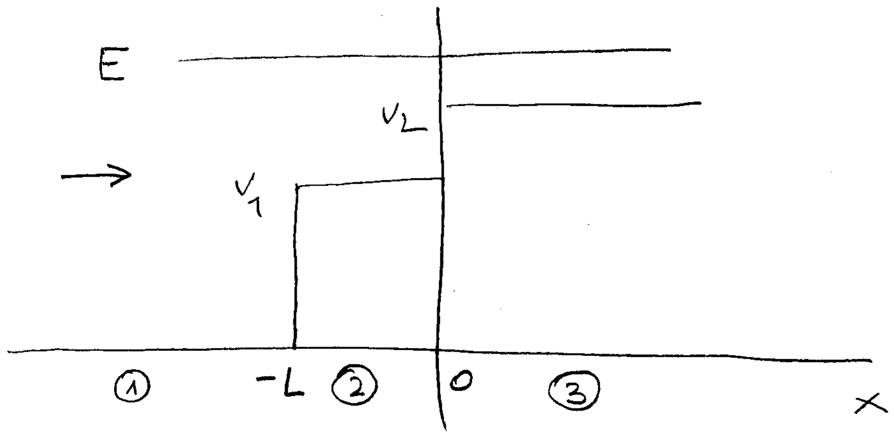
$$e^{ikR}\sin kR \ll kR$$

$$|\qquad| \to kR$$

Imamo

$$\frac{m|V_0|\cdot R}{\hbar^2\cdot k} \ll 1 \Rightarrow$$ kako k raste ova jednakost bolje vrijedi bez obzira na $|V_0|$; naravno, prije će biti ispunjena ako je potencijal slab (V_0 mali) i kratkog dosega (R mali)

22.5



Čestica upada s lijeva

Jednadžbe i rješenja:

- područje ①

$$u_1'' + k_1^2 u_1 = 0 \quad ; \quad k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$u_1(x) = A_1 e^{ik_1x} + B_1 e^{-ik_1x}$$

- područje ②

$$u_2'' + k_2^2 u_2 = 0 \quad ; \quad k_2^2 = \frac{2m(E-V_1)}{\hbar^2}$$

$$u_2(x) = A_2 e^{ik_2x} + B_2 e^{-ik_2x}$$

- područje ③

$$u_3'' + k_3^2 u_3 = 0 \quad ; \quad k_3^2 = \frac{2m(E-V_2)}{\hbar^2}$$

$$u_3(x) = A_3 e^{ik_3x}$$

Rubni uvjeti na $x=-L$ i $x=0$:

- $u_1 = u_2 \Big|_{x=-L} \Rightarrow A_1 e^{-ik_1L} + B_1 e^{ik_1L} = A_2 e^{-ik_2L} + B_2 e^{ik_2L}$

- $u_1' = u_2' \Big|_{x=-L} \Rightarrow ik_1 A_1 e^{-ik_1L} - ik_1 B_1 e^{ik_1L}$

$$= ik_2 A_2 e^{-ik_2L} - ik_2 B_2 e^{ik_2L}$$

- $u_2 = u_3 \big|_{x=0} \Rightarrow A_2 + B_2 = A_3$

- $u_2' = u_3' \big|_{x=0} \Rightarrow i k_2 A_2 - i k_2 B_2 = i k_3 A_3$

Treba riješiti ovaj sustav jednadžbi; možemo staviti

$$A_1 = 1$$

Rješenja sam dobio u Mathematici. Da se potpuno spriječi refleksija na V_2 treba postaviti

$$R = 0 \text{ ili } T = 1$$

Na primjer, za prvi uvjet je

$$R = \frac{|j_r|}{|j_u|} = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2}$$

gdje su j_u i j_r upadna i reflektirana struja na $x=0$. Imamo

$$R = \left| \frac{e^{2ik_2L}(k_1+k_2)(k_2-k_3) + (k_1-k_2)(k_2+k_3)}{e^{2ik_2L}(k_1-k_2)(k_2-k_3) + (k_1+k_2)(k_2+k_3)} \right| = 0$$

Brojnik je nula ako je

$$e^{2ik_2L} = \frac{(k_2-k_1)(k_2+k_3)}{(k_1+k_2)(k_2-k_3)}$$

Na desnoj strani imamo sve realne veličine; s tim da je $k_2 < k_1$ i $k_3 < k_2$. Prema tome je <u>desna strana negativna</u>.

Desnu stranu možemo zapisati pomoću <u>kompleksnog broja</u> kao

$$\left| \frac{(k_2-k_1)(k_2+k_3)}{(k_1+k_2)(k_2-k_3)} \right| e^{i(2n+1)\pi} \quad ; \quad n = 0,1,2,\ldots \quad \boxed{k_2 > 0}$$

Usporedimo s kompleksnim brojem na lijevoj strani. Imamo

$$\left|\frac{(k_2-k_1)(k_2+k_3)}{(k_2+k_1)(k_2-k_3)}\right| = 1$$

ili

$$(k_1-k_2)(k_2+k_3) = (k_1+k_2)(k_2-k_3)$$

Drugi uvjet je

$$2k_2L = (2n+1)\pi \quad ; \quad n=0,1,2,\ldots$$

$$k_2 = \frac{(2n+1)\pi}{2L}$$

Iz prvog uvjeta je

$$\cancel{k_1k_2} + k_1k_3 - k_2^2 - \cancel{k_2k_3} = \cancel{k_1k_2} - k_1k_3 + k_2^2 - \cancel{k_2k_3}$$

$$\boxed{k_1k_3 = k_2^2}$$

$$\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\cdot\sqrt{\frac{2m(E-V_2)}{\hbar^2}} = \frac{2m(E-V_1)}{\hbar^2}$$

$$\sqrt{E(E-V_2)} = E-V_1$$

$$V_1 = E-\sqrt{E(E-V_2)}$$

Zbog drugog uvjeta je

$$k_2^2 = \frac{[(2n+1)\pi]^2}{4L^2} = \frac{2m}{\hbar^2}\sqrt{E(E-V_2)}$$

pa je

$$L^2 = \frac{\hbar^2}{8m}\cdot\frac{[(2n+1)\pi]^2}{\sqrt{E(E-V_2)}}$$

Neka je valna duljina koja odgovara vektoru k_2 jednaka λ_2. Iz drugog uvjeta je

$$\frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{(2n+1)\pi}{2L}$$

$$L = (2n+1)\frac{\lambda_2}{4}$$

ili minimalna debljina

$$L = \frac{\lambda_2}{4}$$

što je slično elektromagnetskim valovima (ovdje su to, recimo, elektroni).

```
In[2]:= Solve[{A1 * Exp[-i * k1 * L] + B1 * Exp[i * k1 * L] == A2 * Exp[-i * k2 * L] + B2 * Exp[i * k2 * L],
    i * k1 * A1 * Exp[-i * k1 * L] - i * k1 * B1 * Exp[i * k1 * L] ==
     i * k2 * A2 * Exp[-i * k2 * L] - i * k2 * B2 * Exp[i * k2 * L], A2 + B2 == A3,
    i * k2 * A2 - i * k2 * B2 == i * k3 * A3}, {B1, A2, B2, A3}] // FullSimplify
```

Out[2]=

$$\left\{\left\{B1 \to \frac{e^{-2 i k1 L} \left(A1\, e^{2 i k2 L} (k1+k2)(k2-k3) + A1 (k1-k2)(k2+k3)\right)}{e^{2 i k2 L} (k1-k2)(k2-k3) + (k1+k2)(k2+k3)},\right.\right.$$

$$A2 \to \frac{2\, A1\, e^{-i (k1-k2) L}\, k1\, (k2+k3)}{e^{2 i k2 L} (k1-k2)(k2-k3) + (k1+k2)(k2+k3)},$$

$$B2 \to \frac{2\, A1\, e^{-i (k1-k2) L}\, k1\, (k2-k3)}{e^{2 i k2 L} (k1-k2)(k2-k3) + (k1+k2)(k2+k3)},$$

$$\left.\left.A3 \to \frac{4\, A1\, e^{-i (k1-k2) L}\, k1\, k2}{e^{2 i k2 L} (k1-k2)(k2-k3) + (k1+k2)(k2+k3)}\right\}\right\}$$

22.6

(a) Rješavamo Schrödingerovu jednadžbu oblika

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V\psi = E\psi$$

odnosno,

$$\psi'' + k^2\psi = \frac{2m}{\hbar^2}V(x)\psi$$

gdje je $k^2 = 2mE/\hbar^2$, $E>0$. Rješenje je slično kao i u 3D

$$\psi(x) = u(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\int G(x,x')V(x')\psi(x')dx'$$

Funkcija $u(x)$ je rješenje jednadžbe $u'' + k^2 u = 0$. Na primjer, ako se početni ravni val giba udesno, $u(x) = e^{ikx}$. Funkcija $G(x,x')$ je Greenova funkcija koja zadovoljava jednadžbu

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right)G(x,x') = \delta(x'-x) \qquad (*)$$

što se može provjeriti direktnim uvrštavanjem. Fourierov integral za $\delta(x-x')$ je

$$\delta(x'-x) = \frac{1}{2\pi}\int e^{iq(x'-x)}dq$$

a za $G(x,x')$

$$G(x,x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{iq(x'-x)}g(q)\,dq$$

Uvrstimo oba Fourierova integrala u $(*)$. Dobijemo

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int [-q^2+k^2]e^{iq(x'-x)}g(q)\,dq = \frac{1}{2\pi}\int e^{iq(x'-x)}dq$$

odnosno,

$$[-q^2+k^2]\,g(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Rightarrow g(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{k^2-q^2}$$

Greenova funkcija je

$$G(x,x') = \frac{1}{2\pi}\int \frac{e^{iq(x'-x)}}{k^2-q^2}\,dq$$

Integral ćemo riješiti pomoću kompleksne varijable i Cauchyjeve integralne formule što je ekvivalentno upotrebi teorema o residuumima. Dakle, stavljamo

$$q \to z \in \mathbb{C}$$

Cauchyjeva integralna formula

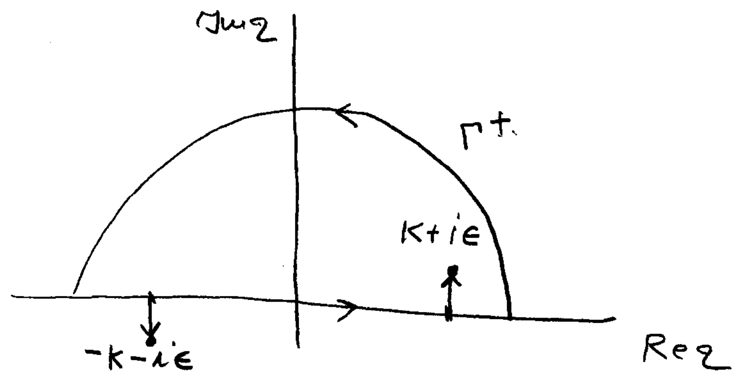
$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi f(z_0)$$

gdje je $f(z)$ analitička unutar i na konturi Γ.

Neka je $x'-x>0$. Polovi funkcije

$$\frac{e^{iz(x'-x)}}{k^2-z^2}$$

leže na realnoj osi pa ćemo ih pomaknuti kao na slici:



Krivulju integracije u Cauchyjevoj formuli odabrat ćemo kao na slici. Naime,

$$iz(x'-x) = -\mathrm{Im}\,z\cdot(x'-x) + i\,\mathrm{Re}\,z\cdot(x'-x)$$

pa integral iščezava za $\mathrm{Im}\,z>0$, $\mathrm{Im}\,z\to\infty$.

Imamo

$$\oint_{\Gamma^+} \frac{e^{iq(x'-x)}}{(k+i\epsilon)^2-q^2}\,dq = -\oint \frac{e^{iq(x'-x)}}{(k+i\epsilon)+q}\cdot\frac{dq}{q-(k+i\epsilon)}$$

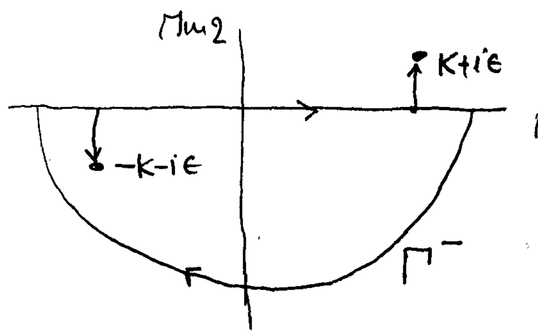
$$= -\left.\frac{e^{iq(x'-x)}}{q+(k+i\epsilon)}\right|_{q=k+i\epsilon}\cdot 2\pi i$$

$$= -\frac{e^{i(k+i\epsilon)(x'-x)}}{2(k+i\epsilon)}\cdot \pi i$$

Za $\Gamma^+\to\infty$ i za $\epsilon\to 0$ dobijemo

$$\oint_{\Gamma^+\to\infty} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iq(x'-x)}}{k^2-q^2}\,dq = -\frac{e^{ik(x'-x)}}{k}\cdot\pi i$$

Slično, za $x'-x<0$ dobijamo, za konturu Γ^-,



$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iq(x'-x)}}{k^2-q^2}\,dq = -\frac{e^{ik(x'-x)}}{k}\cdot\pi i$$

Sve skupa,

$$G(x,x') = -\frac{i}{2k}\,e^{ik|x-x'|}$$

Uvrstimo u rešenje

$$\psi(x) = u(x) - \frac{im}{\hbar^2 k}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x-x'|}\,V(x')\,\psi(x')\,dx'$$

(b) Neka je $u(x) = e^{ikx}$. Za $\psi(x) = u(x)$ je raspršeni val

$$-\frac{im}{\hbar^2 k}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x-x'|}\, V(x')\, e^{ikx'}\, dx'$$

Reflektirani val je u području $x < x'$, $x - x' < 0$

$$e^{ik|x-x'|} = e^{-ik(x-x')}$$

pa imamo

$$-\frac{im}{\hbar^2 k}\, e^{-ikx}\int_{-\infty}^{\infty} e^{2ikx'}\, V(x')\, dx'$$

Koeficijent refleksije

$$R \simeq \left|\frac{j_r}{j_u}\right| = \left(\frac{m}{\hbar^2 k}\right)^2 \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{2ikx'}\, V(x')\, dx'\right|^2$$

(c) Za $V(x) = -\alpha\,\delta(x)$ imamo

$$-\alpha\int_{-\infty}^{\infty} e^{2ikx'}\,\delta(x')\, dx' = -\alpha$$

$$R = \left(\frac{m\alpha}{\hbar^2 k}\right)^2$$

Točno; $R = \left(1 + \frac{2\hbar^2}{m\alpha^2}\cdot\underbrace{\frac{\hbar^2 k^2}{2m}}_{E}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{\hbar^4 k^2}{m^2\alpha^2}\right)^{-1} = \left(\frac{m\alpha}{\hbar^2 k^2}\right)^2\left(\frac{1}{1+\left(\frac{\alpha m}{\hbar^2 k}\right)^2}\right)$

slabi potencijal i visoke energije $\left(\frac{\alpha m}{\hbar^2 k}\right) \ll 1 \Rightarrow R = \left(\frac{m\alpha}{\hbar^2 k}\right)^2$