KVANTNA MEHANIKA

Zadaci za vježbe 12. 6. 2025.

23 Metoda parcijalnih valova

23.1 Metodom parcijalnih valova izračunajte totalni udarni presjek i fazne pomake za potencijal oblika

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq a, \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

23.2 Dokažite optički teorem koji povezuje totalni udarni presjek s imaginarnim dijelom amplitude raspršenja za smjer prema naprijed

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f(0)$$

23.3 Čestice se raspršuju na potencijalu $V(r) = g/r^2$, gdje je g pozitivna konstanta.
(a) Napišite i riješite radijalnu Schrödingerovu jednadžbu za ovaj problem.
(b) Dokažite da su fazni pomaci dani jednadžbom

$$\delta_l = \frac{\pi}{2}\left[l + \frac{1}{2} - \sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2gm}{\hbar^2}} \right]$$

(c) Nađite ovisnost diferencijalnog udarnog presjeka o energiji za fiksni kut raspršenja.
(d) Nađite fazne pomake δ_l za $2gm/\hbar^2 << 1$ i pokažite da je tada diferencijalni udarni presjek

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{\pi^3}{2\hbar^2}\frac{g^2 m}{E}\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

gdje je E energija raspršene čestice.
(e) Koliki je diferencijalni udarni presjek za zadani potencijal u Bornovoj aproksimaciji? Usporedite s rezultatom pod (d).

23.4 (a) Promotrite potencijal oblika

$$V(r) = \begin{cases} 0, & r > R \\ V_0, & r < R \end{cases}$$

gdje je V_0 pozitivna ili negativna konstanta. Upotrijebite metodu parcijalnih valova i pokažite da za

$$|V_0| \ll E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad kR \ll 1$$

diferencijalni udarni presjek postaje izotropan i da je totalni udarni presjek dan formulom

$$\sigma_{tot} = \left(\frac{16\pi}{9}\right)\frac{m^2 V_0^2 R^6}{\hbar^4}.$$

(b) Prepostavimo da energiju upadne čestice malo povećamo. Pokažite da diferencijalni udarni presjek postaje

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha + \beta\cos\theta$$

Izračunajte aproksimativno koliko je β/α.

23.5 Može se izvesti da su fazni pomaci u (prvoj) Bornovoj aproksimaciji jednaki

$$\tan\delta_l = -k\int_0^\infty \left[j_l(kr) \right]^2 U(r) r^2 dr$$

gdje je $U(r)$ reducirani potencijal, $U(r) = (2m/\hbar^2)V(r)$. Upotrijebite ovu formulu te pokažite da vrijedi

$$\tan\delta_l \xrightarrow[k\to\infty]{} -\frac{1}{2k}\int_0^\infty U(r)\,dr + O\left(k^{-2}\right)$$

gdje su $O(k^{-2})$ ostali članovi reda −2 ili nižeg.
***Uputa*:** upotrijebite asimptotski razvoj za sfernu Besselovu funkciju $j_l(kr)$ iz Pregleda formula.

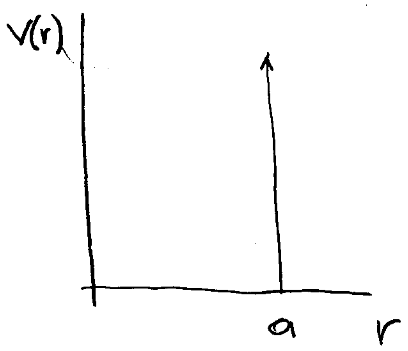
23.6 Pretpostavimo da je diferencijalni udarni presjek za elastično raspršenje oblika

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = A + BP_1(\cos\theta) + CP_2(\cos\theta) + \ldots$$

Izrazite koeficijente A, B i C pomoću faznih pomaka δ_l .
***Uputa*:** primijenite relaciju ortogonalnosti za Legendreove polinome i rekurzivnu relaciju ($l \geq 0$)

$$(l+1)P_{l+1}(x) = (2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x)$$

23.1



$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r \le a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

Quantum hard-sphere scattering

Rubni uvjet:

$$\psi(a,\theta) = 0$$

Ovaj rubni uvjet je posljedica beskonačnosti potencijala u $r=a$.

Primijenimo rubni uvjet na formulu (23.2) iz Pregleda formula

$$A \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell}(2\ell+1)\left[j_\ell(ka) + ikB_\ell h_\ell^{(1)}(ka)\right] P_\ell(\cos\theta) = 0$$

Funkcije $P_\ell(\cos\theta)$ su linearno nezavisne pa vrijedi

$$j_\ell(ka) + ikB_\ell h_\ell^{(1)}(ka) = 0$$

$$B_\ell = -\frac{1}{ik}\frac{j_\ell(ka)}{h_\ell^{(1)}(ka)}$$

Totalni udarni presjek

$$\sigma_{TOT} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)\frac{1}{k^2}\left|\frac{j_\ell(ka)}{h^{(1)}(ka)}\right|^2$$

Raspršenje na niskim energijama

$ka \ll 1$

$$j_\ell(ka) \xrightarrow[ka \ll 1]{} \frac{(ka)^\ell}{(2\ell+1)!!}$$

$$h_\ell^{(1)}(ka) \xrightarrow[ka \ll 1]{} n_\ell(ka) \xrightarrow[ka \ll 1]{} \frac{(2\ell+1)!!}{2\ell+1}\cdot\frac{1}{(ka)^{\ell+1}}$$

$$\frac{j_l(ka)}{h_l^{(1)}(ka)} \xrightarrow[ka \ll 1]{} \frac{(ka)^{2l+1} \cdot (2l+1)}{[(2l+1)!!]^2}$$

$$\sigma_{TOT} \simeq \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \cdot \frac{(ka)^{4l+2}}{[(2l+1)!!]^4}$$

Dominantan član u gornjoj sumi je $l=0$; ostali članovi su mnogo manji od $l=0$.

$$\sigma_{TOT} \simeq \frac{4\pi}{k^2} \frac{(ka)^2}{1} = 4\pi a^2$$

Totalni udarni presjek jednak je površini sfere. Čestice kao da "osjećaju" cijelu sferu. Klasično se dobiva $a^2\pi$ što je zapravo pravi (poprečni) presjek sfere.

Fazne pomake računamo pomoću (23.10)

$$\tan \delta_l = \frac{\operatorname{Im} B_l}{\operatorname{Re} B_l}$$

$$B_l = \frac{i}{k} \cdot \frac{j_l}{j_l + i n_l} = \frac{i}{k} \cdot \frac{j_l (j_l - i n_l)}{j_l^2 + n_l^2} = \frac{1}{k} \frac{j_l n_l + i j_l^2}{j_l^2 + n_l^2}$$

$$\tan \delta_l = \frac{j_l^2}{j_l n_l} = \frac{j_l}{n_l}$$

$$\delta_l = \arctan\left(\frac{j_l(ka)}{n_l(ka)}\right) \xrightarrow[ka \ll 1]{} \arctan\left\{\frac{(ka)^{2l+1} (2l+1)}{[(2l+1)!!]^2}\right\}$$

$$e^{i\delta_e} = \cos\delta_e + i\sin\delta_e$$

Usporedimo kompleksni i realni dio:

$$\cos\delta_e \sin\delta_e = \frac{\left(\frac{n}{j}\right)}{1+\left(\frac{n}{j}\right)^2}$$

$$\sin^2\delta_e = \frac{1}{1+\left(\frac{n}{j}\right)^2}$$

Dobivamo dijeljenjem

$$\tan\delta_e = \frac{1}{\left(\frac{n}{j}\right)}$$

$$\delta_e = \arctan\left[\frac{j_e(ka)}{n_e(ka)}\right]$$

$\boxed{23.2}$

Amplituda raspršenja

$$f(\theta) = \frac{1}{K} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, e^{i\delta_l} \sin\delta_l\, P_l(\cos\theta)$$

u $\theta = 0$

$$f(0) = \frac{1}{K} \sum_{K=0}^{\infty} (2l+1)\, e^{i\delta_l} \sin\delta_l$$

Iz pregleda formula, totalni udarni presjek

$$\sigma_{tot} = \frac{1}{K^2} \sum_{l=0} |c_l|^2 = \frac{1}{K^2} \cdot 4\pi \sum_{l} (2l+1) \sin^2\delta_l$$

Imaginarni dio od $f(0)$

$$\mathrm{Im}\, f(0) = \frac{1}{K} \sum_{K=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2\delta_l$$

Odavdje

$$\sigma_{TOT} = \frac{4\pi}{K}\, \mathrm{Im}\, f(0)$$

23.3

(a) Radijalna Schrödingerova jednadžba glasi

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + V(r) + k^2 \right\} R(r) = 0 \qquad (*)$$

Uvrstimo li odbojni potencijal

$$V(r) = \frac{g}{r^2}$$

i promijenimo varijablu

$$\rho = kr$$

dobivamo

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left[1 - \frac{1}{\rho^2}\left(\ell(\ell+1) + \frac{2mg}{\hbar^2}\right)\right] R = 0$$

Ova je jednadžba identična onoj za sferne Besselove funkcije $j_n(\rho)$, $n_\ell(\rho)$ samo imamo dodatnu konstantu u koeficijentu pored ρ^{-2}. Definiramo li

$$\nu(\nu+1) \equiv \ell(\ell+1) + \frac{2mg}{\hbar^2}$$

rješenje će također biti sferne Besselove funkcije prve vrste

$$j_\nu(kr) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{kr}}\, J_{\nu+1/2}(kr)$$

Rješenje dane jednadžbe je i sferna Neumannova funkcija $n_\nu(kr)$ no ona je beskonačna za $r \to 0$, ne predstavlja fizikalno rješenje.

(b) Ako je potencijal približno nula, u području detekcije čestica, $V(r) \approx 0$ te za rješenja jednadžbe (*) dobivamo sferne valove $j_\ell(kr)$.

Asimptotsko ponašanje za $j_l(kr)$ je oblika

$$j_l(kr) \xrightarrow[\rho\to\infty]{} \frac{1}{k\rho}\sin\left[kr - \frac{l\pi}{2}\right]$$

Asimptotsko ponašanje za $j_\nu(kr)$ je slično

$$j_\nu(kr) \xrightarrow[\rho\to\infty]{} \frac{1}{kr}\sin\left[kr - \frac{\nu\pi}{2}\right] = \frac{1}{kr}\sin\left[kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right]$$

gdje su δ_l fazni pomaci koje moramo odrediti. U ovom slučaju granica između područja raspršenja i područja detekcije nije oštro definirana kao u zadatku 23.1. Ono što je činjenica jest da se valne funkcije daleko od mete moraju podudarati jer potencijal ima veliki doseg. Usporedbom funkcije $j_l(kr)$ i $j_\nu(kr)$ dobivamo

$$\delta_l = \frac{\pi}{2}(l-\nu) \qquad (***)$$

gdje je ν određena pomoću $(**)$

$$\nu = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2mg}{\hbar^2}}$$

Uzet ćemo predznak $+$ jer je $\nu > 0$! Uvrstimo li u $(***)$ dobijemo traženi rezultat

$$\delta_l = \frac{\pi}{2}\left[l + \frac{1}{2} - \sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2mg}{\hbar^2}}\right]$$

(c) Diferencijalni udarni presjek dan je formulom

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{1}{k^2}\left|\sum_{l=0}(2l+1)\,e^{i\delta_l}\sin\delta_l\, P_l(\cos\theta)\right|^2$$

Fazni pomaci δ_ℓ ne ovise o k, odnosno o energiji E.

Prema tome, sva ovisnost o energiji je dana kroz

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{1}{k^2} \propto \frac{1}{E}$$

pri čemu je θ konstantan.

(d) Za

$$\frac{2gm}{\hbar^2} \ll 1 < \ell(\ell+1)$$

imamo razvojem u red

$$\delta_\ell \simeq \frac{\pi}{2}\left[\ell+\frac{1}{2}-\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2mg}{(\ell+\frac{1}{2})^2\hbar^2}\right)\right]$$

$$= -\frac{\pi}{2}\frac{mg}{\hbar^2(\ell+\frac{1}{2})} \ll 1$$

Za $\delta_\ell \ll 1$ je

$$e^{i\delta_\ell}\sin\delta_\ell \simeq \delta_\ell$$

pa je diferencijalni udarni presjek

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \frac{1}{k^2}\left|\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\frac{\pi}{2}\frac{mg}{\hbar^2(\ell+\frac{1}{2})}P_\ell(\cos\theta)\right|^2$$

$$= \frac{\pi^2 m^2 g^2}{\hbar^4 k^2}\left|\sum_{\ell=0}^{\infty}P_\ell(\cos\theta)\right|^2$$

Odredit ćemo sumu po ℓ u gornjem izrazu. Vrijedi izraz

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}P_\ell(\cos\theta)\,t^\ell = \frac{1}{\sqrt{1-2t\cos\theta+t^2}}$$

Za $t=1$ dobivamo

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) = \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}} = \frac{1}{2|\sin\theta/2|} = \frac{1}{2\sin\theta/2}$$

Diferencijalni udarni presjek postaje

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi^2 m^2 g^2}{4\hbar^4 k^2} \cdot \frac{1}{\sin^2\theta/2}$$

odnosno, za $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\phi$, integriramo li po ϕ

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{\pi^3}{4\hbar^2} \cdot \frac{g^2 m}{E} \cdot \underbrace{\frac{\sin\theta}{\sin^2\theta/2}} = \frac{\pi^3}{2\hbar^2} \cdot \frac{g^2 m}{E} \cot\frac{\theta}{2}$$

(e) U Bornovoj aproksimaciji amplitude raspršenja glasi

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2 q}\int_0^\infty \sin(qr)\cdot r V(r)\,dr$$

$$= -\frac{2mg}{\hbar^2 q}\underbrace{\int_0^\infty \frac{\sin(qr)}{r}\,dr}_{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{q}} = -\frac{\pi m g}{\hbar^2 q^2}$$

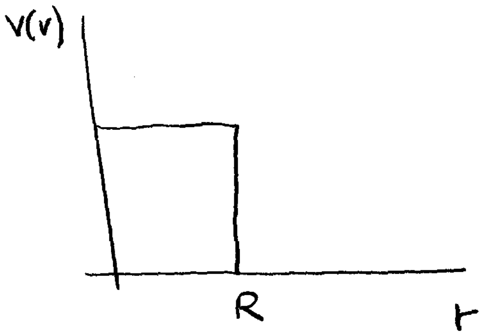
pa se diferencijalni udarni presjek poklapa s onim izračunatim pomoću metode parcijalnih valova ($q = 2k\sin\theta/2$)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi^2 m^2 g^2}{4\hbar^4 k^2} \cdot \frac{1}{\sin^2\theta/2}$$

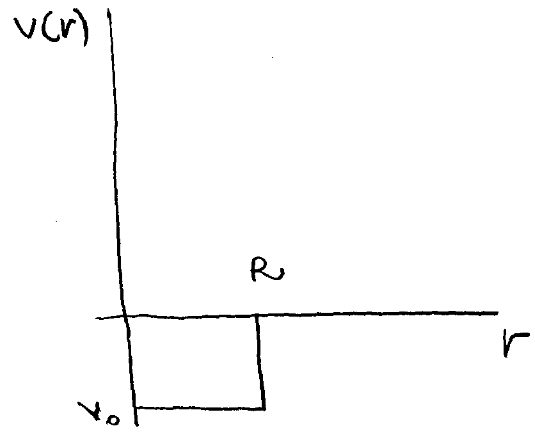
Rezultat smo očekivali jer su fazni pomaci $\delta_l \ll 1$ tj. potencijal je slab.

23.4

(a)



$V_0 > 0$



$V_0 < 0$

Radijalna Schrödingerova jednadžba za $r<R$

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}-\frac{2mV_0}{\hbar^2}+k^2\right\}R(r)=0$$

Definiramo

$$\varkappa^2 = k^2 - \frac{2mV_0}{\hbar^2}\,; \qquad k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$$

Ako je $kR \ll 1$ i $\frac{2m|V_0|}{\hbar^2 k^2} \ll 1$ imamo

$$\varkappa R = \sqrt{k^2R^2 - \frac{2m|V_0|R^2}{\hbar^2}} = kR\sqrt{1-\underbrace{\frac{2m|V_0|}{\hbar^2k^2}}_{\ll 1}} \ll 1$$

Rješenje radijalne Schrödingerove jednadžbe (*) za $r<R$

$$R(r) = C_\ell\, j_\ell(\varkappa r) + D_\ell\, n_\ell(\varkappa r)$$

Rješenje mora biti konačno pa je $D_\ell=0$. Rješenje u području $r>R$ znamo: za fiksni ℓ je rješenje radijalne jednadžbe

$$A\left(i^\ell(2\ell+1)\left[j_\ell(kr)+ikB_\ell\, h_\ell^{(1)}(kr)\right]\right.$$

Rubni uvjeti na $r=R$:

- neprekidnost

$$\frac{C_\ell}{A} j_\ell(\varkappa R) = i^\ell(2\ell+1)\left[j_\ell(kR) + ikB_\ell h_\ell^{(1)}(kR)\right]$$

- neprekidnost derivacije

$$\frac{C_\ell}{A} \varkappa j_\ell'(\varkappa R) = i^\ell(2\ell+1)\left[k j_\ell'(kR) + ik^2 B_\ell h_\ell^{(1)\prime}(kR)\right]$$

Ovo je sustav jednadžbi za koeficijente

$$\frac{C_\ell}{A i^\ell(2\ell+1)} \text{ i } ikB_\ell$$

$$\left[\frac{C_\ell}{A i^\ell(2\ell+1)}\right] j_\ell(\varkappa R) - \left[ikB_\ell\right] h_\ell^{(1)}(kR) = j_\ell(kR)$$

$$\left[\frac{C_\ell}{A i^\ell(2\ell+1)}\right] \varkappa j_\ell'(\varkappa R) - \left[ikB_\ell\right] k h_\ell^{(1)\prime}(kR) = k j_\ell'(kR)$$

Trebaju nam koeficijenti B_ℓ. Prema Cramerovom pravilu

$$ikB_\ell = \frac{\begin{vmatrix} j_\ell(\varkappa R) & j_\ell(kR) \\ \varkappa j_\ell'(\varkappa R) & k j_\ell'(kR) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j_\ell(\varkappa R) & -h_\ell^{(1)}(kR) \\ \varkappa j_\ell'(\varkappa R) & -k h_\ell^{(1)\prime}(kR) \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{k j_\ell(\varkappa R) j_\ell'(kR) - \varkappa j_\ell'(\varkappa R) j_\ell(kR)}{k j_\ell(\varkappa R) h_\ell^{(1)\prime}(kR) - \varkappa h_\ell^{(1)}(kR) j_\ell'(\varkappa R)}$$

Ovo je točno rješenje za koeficijente B_ℓ. Sada ih treba izračunati u aproksimaciji $KR \ll 1$ i $\varkappa R \ll 1$.

Budući je $h_\ell^{(1)}(x) = j_\ell(x) + i\, n_\ell(x)$ razlomak u amplitudi B_ℓ možemo zapisati u obliku

$$\frac{1}{1 + i\,\underbrace{\dfrac{K j_\ell(\varkappa R)\, n_\ell'(KR) - \varkappa\, j_\ell'(\varkappa R)\, n_\ell(KR)}{K j_\ell(\varkappa R)\, j_\ell'(KR) - \varkappa\, j_\ell'(\varkappa R)\, j_\ell(KR)}}_{F_\ell \text{ je realan}}}$$

Amplitude B_ℓ možemo zapisati u obliku

$$B_\ell = \frac{i}{K} \cdot \frac{1}{1 + iF_\ell} = \frac{i}{K} \cdot \frac{1 - iF_\ell}{1 + F_\ell^2} = \frac{1}{K} \cdot \frac{F_\ell + i}{1 + F_\ell^2}$$

Aproksimativnu vrijednost izraza F_ℓ nije lagano izračunati. Rezultat sam dobio u Mathematici ($KR \ll 1$, $\varkappa R \ll 1$).

$$F_\ell \simeq -\frac{4^{\ell+2}(KR)^{-(2\ell+1)}\,\Gamma(\ell+\frac{3}{2})\Gamma(\ell+\frac{5}{2})}{(\ell+2)\,\pi R^2 (K^2 - \varkappa^2)}$$

Za $KR \ll 1$, $\varkappa R \ll 1$ je $F_\ell \gg 1$. Koeficijenti B_ℓ u toj aproksimaciji

$$B_\ell \simeq \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{1}{F_\ell} + \frac{i}{F_\ell^2}\right)$$

Fazni pomaci

$$\tan \delta_\ell = \frac{\mathrm{Im}(B_\ell)}{\mathrm{Re}(B_\ell)} = \frac{1}{F_\ell}$$

Uvrstimo li aproksimativni izraz dobijemo

$$\tan\delta_\ell \simeq -\frac{(\ell+2)\pi R^2 (kR)^{2\ell+1}}{4^{\ell+2}\,\Gamma(\ell+\frac{3}{2})\Gamma(\ell+\frac{5}{2})}\cdot\frac{2mV_0}{\hbar^2} \ll 1$$

Vidimo da su fazni pomaci mali i da je član $\ell=0$ dominantan u diferencijalnom udarnom presjeku, odnosno, totalnom udarnom presjeku. Budući je

$$\tan\delta_\ell \simeq \sin\delta_\ell \simeq \delta_\ell$$

Totalni udarni presjek glasi (za $\ell=0$)

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0$$

$$= \frac{4\pi}{k^2}\cdot\frac{\pi^2 R^4 (kR)^2}{16^2[\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{5}{2})]^2}\cdot\frac{4m^2|V_0|^2}{\hbar^4}$$

$$\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{\cancel{k^2}}\cdot\frac{\cancel{\pi^2}R^4\cancel{k^2}R^2\cdot\cancel{16^2}}{16^{\cancel{2}}\cdot\cancel{\pi^2}\cdot 9}\cdot\frac{4m^2|V_0|^2}{\hbar^4}$$

$$= \frac{\pi R^6 m^2 |V_0|^2\cdot 16}{9\hbar^4}$$

(b) Amplituda raspršenja, uzmemo li u obzir prva dva člana

$$f(\theta) \simeq \frac{1}{K}\left[e^{i\delta_0}\sin\delta_0 + 3e^{i\delta_1}\sin\delta_1\cos\theta \right]$$

Diferencijalni udarni presjek

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = f^* f = \frac{1}{K^2}\left[\sin^2\delta_0 + 6\,\mathrm{Re}\, e^{i(\delta_1-\delta_0)}\sin\delta_0\sin\delta_1\cos\theta + \dots\right]$$

Usporedimo s $\alpha + \beta\cos\theta$

$$\alpha = \frac{1}{K^2}\sin^2\delta_0$$

$$\beta = \frac{6}{K^2}\cos(\delta_1-\delta_0)\sin\delta_0\sin\delta_1$$

Treba izračunati β/α

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{6\cos(\delta_1-\delta_0)\sin\delta_0\sin\delta_1}{\sin^2\delta_0} = \frac{6\cos(\delta_1-\delta_0)\sin\delta_1}{\sin\delta_0}$$

$$= 6\left[\cos\delta_1\,\mathrm{ctg}\,\delta_0 + \sin\delta_1\right]\sin\delta_1$$

$$\delta_1 \simeq \sin\delta_1 \simeq \tan\delta_1 = \underbrace{\frac{3(KR)^2\,\Gamma(\frac{3}{2})}{4\cdot\Gamma(\frac{7}{2})\cdot 2}}_{\frac{(KR)^2}{10}}\cdot\underbrace{(-1)\cdot\frac{2\pi R^2(KR)}{4^2\,\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}\cdot\frac{2mV_0}{\hbar^2}}_{\delta_0}$$

$$\delta_1 \simeq \delta_0\frac{(KR)^2}{10}$$

$$\cos\delta_1 \simeq 1$$

$$\sin\delta_1 \simeq \delta_1$$

$$\frac{\beta}{\alpha} \simeq \frac{6\delta_1}{\delta_0} + 6\delta_1^2 = \frac{6(KR)^2}{10} + \frac{6(KR)^4}{100}\delta_0^2 \simeq \frac{3(KR)^2}{5}$$

```
f[x_] = Normal[Series[SphericalBesselJ[l, x], {x, 0, 1}]]
```

$$\frac{2^{-1-l}\sqrt{\pi}\,x^{l}}{\text{Gamma}\left[\frac{3}{2}+l\right]}$$

```
f1[x_] = Normal[Series[∂x SphericalBesselJ[l, x], {x, 0, 1}]]
```

$$x^{l}\left(\frac{\frac{2^{-1-l}\sqrt{\pi}}{\text{Gamma}\left[\frac{1}{2}+l\right]}-\frac{2^{-2-l}\sqrt{\pi}}{\text{Gamma}\left[\frac{3}{2}+l\right]}}{x}+x\left(-\frac{2^{-3-l}\sqrt{\pi}}{\left(\frac{1}{2}+l\right)\text{Gamma}\left[\frac{1}{2}+l\right]}+\frac{2^{-4-l}\sqrt{\pi}}{\left(\frac{3}{2}+l\right)\text{Gamma}\left[\frac{3}{2}+l\right]}-\frac{2^{-3-l}\sqrt{\pi}}{\text{Gamma}\left[\frac{5}{2}+l\right]}\right)\right)$$

```
g[x_] = Normal[Series[SphericalBesselY[l, x], {x, 0, 1}]]
```

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,x^{-l}\left(-\frac{2^{-\frac{1}{2}-l}x^{2l}\,\text{Cos}\left[\left(\frac{1}{2}+l\right)\pi\right]\text{Gamma}\left[-\frac{1}{2}-l\right]}{\pi}-\frac{2^{\frac{1}{2}+l}\,\text{Gamma}\left[\frac{1}{2}+l\right]}{\pi\,x}\right)$$

```
g1[x_] = Normal[Series[∂x SphericalBesselY[l, x], {x, 0, 1}]]
```

$$x^{-l}\left(\frac{2^{-3-l}x^{1+2l}\,\text{Cos}\left[\left(\frac{3}{2}+l\right)\pi\right]\text{Gamma}\left[-\frac{3}{2}-l\right]}{\sqrt{\pi}}+\frac{2^{-2-l}x^{-1+2l}\,\text{Cos}\left[\left(\frac{1}{2}+l\right)\pi\right]\text{Gamma}\left[-\frac{1}{2}-l\right]}{\sqrt{\pi}}-\frac{2^{-1-l}x^{-1+2l}\,\text{Cos}\left[\left(-\frac{1}{2}+l\right)\pi\right]\text{Gamma}\left[\frac{1}{2}-l\right]}{\sqrt{\pi}}+\frac{2^{-1+l}\left(\text{Gamma}\left[\frac{1}{2}+l\right]+2\,\text{Gamma}\left[\frac{3}{2}+l\right]\right)}{\sqrt{\pi}\,x^{2}}\right)$$

```
FullSimplify[k * f[κ * R] * f1[k * R] - f1[κ * R] * f[k * R] * κ]
```

$$-\frac{4^{-2-l}(2+l)\,\pi\,R\,(k\,R)^{l}\,(k-\kappa)\,(R\,\kappa)^{l}\,(k+\kappa)}{\text{Gamma}\left[\frac{3}{2}+l\right]\text{Gamma}\left[\frac{5}{2}+l\right]}$$

```
FullSimplify[k * f[κ * R] * g1[k * R] - f1[κ * R] * g[k * R] * κ]
```

$$\frac{2^{-5-2l}\,k\,(k\,R)^{-2-l}\,(R\,\kappa)^{l}\left(\frac{2^{3+2l}\left(6+8\,l\,(2+l)-(2+l)\,R^{2}\kappa^{2}\right)\text{Gamma}\left[\frac{1}{2}+l\right]}{3+2\,l}+\frac{2\,k\,\pi\,R^{3}\,(k\,R)^{2l}\left(k^{2}-(2+l)\,\kappa^{2}\right)\text{Tan}[l\,\pi]}{\text{Gamma}\left[\frac{5}{2}+l\right]}\right)}{\text{Gamma}\left[\frac{3}{2}+l\right]}$$

$$\text{FullSimplify}\left[\frac{2^{-5-2l}\,k\,(k\,R)^{-2-l}\,(R\,\kappa)^{l}}{\text{Gamma}\left[\frac{3}{2}+l\right]}*\frac{2^{3+2l}\,(6+8\,l\,(2+l))\,\text{Gamma}\left[\frac{1}{2}+l\right]}{3+2\,l}\Bigg/\left(-\frac{4^{-2-l}(2+l)\,\pi\,R\,(k\,R)^{l}\,(k-\kappa)\,(R\,\kappa)^{l}\,(k+\kappa)}{\text{Gamma}\left[\frac{3}{2}+l\right]\text{Gamma}\left[\frac{5}{2}+l\right]}\right)\right]$$

$$-\frac{4^{2+l}\,(k\,R)^{-1-2l}\,\text{Gamma}\left[\frac{3}{2}+l\right]\text{Gamma}\left[\frac{5}{2}+l\right]}{(2+l)\,\pi\,R^{2}\left(k^{2}-\kappa^{2}\right)}$$

$\boxed{23.5}$

$$j_\ell(kr) \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{kr}\sin\left(kr - \frac{\pi\ell}{2}\right)$$

Imamo

$$\tan\delta_\ell \xrightarrow[k\to\infty]{} (-k)\cdot\frac{1}{k^2}\int_0^\infty \sin^2\left(kr-\frac{\ell\pi}{2}\right)U(r)\,dr$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

Imamo

$$-\frac{1}{2k}\int_0^\infty U(r) + \frac{1}{2k}\int_0^\infty \underbrace{\cos(2kr-\ell\pi)}_{\cos(2kr)\underbrace{\cos(\ell\pi)}_{(-1)^\ell}+\sin(2kr)\underbrace{\sin(\ell\pi)}_{=0}} U(r)\,dr$$

ℓ je cijeli broj

Drugi član u gornjem izrazu postaje (parcijalna integracija)

$$\frac{(-1)^\ell}{2k}\int_0^\infty \cos(2kr)U(r)\,dr = \frac{(-1)^\ell}{2k}\cdot\left\{\frac{\sin(2kr)}{2k}U(r)\Big|_0^\infty - \frac{1}{2k}\int_0^\infty \sin(2kr)\,U'(r)\,dr\right\}$$

Za $r\to 0$, $U(r)\to$ konačan, $\sin(2kr)\to 0$

za $r\to\infty$, $U(r)\to 0$ da bi integral $\int_0^\infty U(r)\,dr \to$ konačan

Prema tome, ostaje

$$\frac{(-1)^\ell}{4k^2}\int_0^\infty \sin(2kr)\,U'(r)\,dr$$

Integral možemo procijeniti

$$\left| \int_0^\infty \sin(2kr)\, \mathcal{U}'(r)\, dr \right| \leq \int_0^\infty \underbrace{|\sin 2kr|}_{\leq 1} |\mathcal{U}'(r)| dr$$

$$\leq \int_0^\infty |\mathcal{U}'(r)| dr$$

Prema tome,

$$\left| \frac{(-1)^e}{4k^2} \int_0^\infty \sin(2kr)\, \mathcal{U}'(r)\, dr \right| \leq \frac{1}{4k^2} \int_0^\infty |\mathcal{U}'(r)| dr$$

$$\sim O(k^{-2})$$

Možemo pisati

$$\tan \delta_e \xrightarrow[k \to \infty]{} -\frac{1}{2k} \int_0^\infty \mathcal{U}(r) dr + O(k^{-2})$$

23.6

Pretpostavimo da je

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{\ell'=0}^{\infty} A_{\ell'} P_{\ell'}(\cos\theta)$$

gdje je, prema uvjetima zadatka

$$A_0 \equiv A$$

$$A_1 \equiv B$$

$$A_2 \equiv C$$

$$\vdots$$

Primijenimo li uvjet ortonormiranosti za Legendreove polinome

$$\int \frac{d\sigma}{d\Omega} P_\ell(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = \sum_{\ell'=0}^{\infty} A_{\ell'} \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin\theta\, P_\ell(\cos\theta) P_{\ell'}(\cos\theta)}_{\frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}}$$

Odavdje,

$$A_\ell = \frac{2\ell+1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} P_\ell(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta$$

Integraciju po θ zamijenit ćemo s integracijom po varijabli

$$x = \cos\theta$$

$$A_\ell = \frac{2\ell+1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{d\sigma}{d\Omega} P_\ell(x)\, dx$$

Pomoću ovog izraza treba naći A_0, A_1 i A_2. Iz Pregleda formula je

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2 = f^* f = \frac{1}{k^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{\ell'=0}^{\infty}(2\ell+1)(2\ell'+1)\, e^{i\delta_\ell}\cdot e^{-i\delta_{\ell'}}$$

$$\cdot \sin\delta_\ell \sin\delta_{\ell'} P_\ell(\cos\theta) P_{\ell'}(\cos\theta)$$

Računamo $A_0 = A$

$$A = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{d\sigma}{d\Omega} \underbrace{P_0(x)}_{=1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k^2} \sum_{l\,l'} (2l+1)(2l'+1)\, e^{i\delta_l} \cdot e^{-i\delta_{l'}} \sin\delta_l \sin\delta_{l'}$$

$$\cdot \underbrace{\int_{-1}^{1} dx\, P_l(x)\, P_{l'}(x)}_{\frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}}$$

$$= \frac{1}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2\delta_l = \frac{1}{4\pi}\sigma_{tot}$$

gdje je σ_{tot} totalni udarni presjek.

Računamo $A_1 \equiv B$

$$B = \frac{3}{2} \int \frac{d\sigma}{d\Omega} \underbrace{P_1(x)}_{x} dx$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{k^2} \sum_{l\,l'} (2l+1)(2l'+1)\, e^{i\delta_l} \cdot e^{-i\delta_{l'}} \sin\delta_l \sin\delta_{l'}$$

$$\cdot \int_{-1}^{1} dx\, P_l(x)\, P_{l'}(x)\, \underbrace{P_1(x)}_{x}$$

Treba izračunati integral

$$\int_{-1}^{1} dx\, P_l(x)\, P_{l'}(x)\, x$$

pomoću rekurzivne relacije

$$P_l(x)\, x = \frac{l+1}{2l+1} P_{l+1}(x) + \frac{l}{2l+1} P_{l-1}(x) \; ; \quad l \geq 0$$

Imamo

$$\int_{-1}^{1} dx\, P_{l'}(x)\cdot\left[\frac{l+1}{2l+1}P_{l+1}(x)+\frac{l}{2l+1}P_{l-1}(x)\right]$$

$$=\frac{l+1}{2l+1}\int_{-1}^{1} dx\, P_{l'}P_{l+1}+\frac{l}{2l+1}\int_{-1}^{1} dx\, P_{l'}P_{l-1}$$

$$=2\frac{l+1}{2l+1}\cdot\frac{\delta_{l',l+1}}{2l+3}+\frac{2l}{2l+1}\delta_{l',l-1}\cdot\frac{1}{2l-1}$$

Sličan rezultat bismo dobili da smo zamijenili l i l'

$$\int_{-1}^{1} dx\, P_l P_{l'} x = 2\frac{l'+1}{2l'+1}\frac{\delta_{l,l'+1}}{2l+3}+2\frac{l'}{2l'+1}\frac{\delta_{l,l'-1}}{2l-1}$$

Budući se integral može napisati u obliku

$$\int_{-1}^{1} dx\, P_l P_{l'} x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\ldots+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\ldots$$

Izraz za koeficijent B postaje

$$B=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{k^2}\sum_{ll'}(2l+1)(2l'+1)\,e^{i\delta_l}\cdot e^{-i\delta_{l'}}\sin\delta_l\sin\delta_{l'}$$

$$\cdot\frac{1}{2}\left[2\frac{l+1}{2l+1}\frac{\delta_{l',l+1}}{2l+3}+2\frac{l}{2l+1}\frac{\delta_{l',l-1}}{2l-1}+2\frac{l'+1}{2l'+1}\frac{\delta_{l,l'+1}}{2l'+3}+2\frac{l'}{2l'+1}\frac{\delta_{l,l'-1}}{2l'-1}\right]$$

Zbrojit ćemo 1. i 3. član unutar zagrade, te 2. i 4.

$$B = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)\sin\delta_l \sin\delta_{l+1}\Big[e^{i(\delta_{l+1}-\delta_l)} + e^{-i(\delta_{l+1}-\delta_l)}\Big]$$

$$+ \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{k^2}\sum_{l=0} l\sin\delta_l \sin\delta_{l-1}\Big[e^{i(\delta_l-\delta_{l-1})} + e^{-i(\delta_l-\delta_{l-1})}\Big]$$

Izrazi u kvadratnim zagradama proporcionalni su kosinusu. Druga suma u gornjem izrazu iščezava za $l=0$ (kreće od $l=1$) pa ćemo u toj sumi promijeniti indeks

$$l = l'+1$$

Imamo

$$\sum_{l'=0}^{\infty}(l'+1)\sin\delta_{l'+1}\sin\delta_{l'}\Big[e^{i(\delta_{l'+1}-\delta_{l'})} + e^{-i(\delta_{l'+1}-\delta_{l'})}\Big]$$

što je identično prvoj sumi. Zbrojimo

$$B = 6\cdot\frac{1}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)\sin\delta_l \sin\delta_{l+1}\cdot\cos(\delta_{l+1}-\delta_l)$$

Računamo $A_2 \equiv C$

$$C = \frac{5}{2}\int\frac{d\sigma}{d\Omega}P_2(x)\,dx$$

$$= \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{k^2}\sum_{l\,l'}(2l+1)(2l'+1)\,e^{i\delta_l}\cdot e^{-i\delta_{l'}}\sin\delta_l\sin\delta_{l'}\cdot\int_{-1}^{1}dx\,P_l(x)P_{l'}(x)P_2(x)$$

Kako,

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

pa je

$$C = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{k^2}\cdot\sum_{\ell\ell'}(2\ell+1)(2\ell'+1)e^{i\delta_\ell}\cdot e^{-i\delta_{\ell'}}\sin\delta_\ell\sin\delta_{\ell'}$$
$$\cdot\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}dx\,[P_\ell(x)\cdot x][P_{\ell'}(x)\cdot x]$$

$$-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{k^2}\sum_{\ell\ell'}(2\ell+1)(2\ell'+1)\,e^{i\delta_\ell}\cdot e^{-i\delta_{\ell'}}\sin\delta_\ell\sin\delta_{\ell'}$$
$$\cdot\int_{-1}^{1}\underbrace{dx\,P_\ell(x)\,P_{\ell'}(x)}_{\frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}}$$

Treba izračunati integral

$$\int_{-1}^{1}dx\,[P_\ell(x)\,x][P_{\ell'}(x)\cdot x]$$

Uvrstimo rekurzijsku relaciju

$$\int_{-1}^{1}dx\left[\frac{\ell+1}{2\ell+1}P_{\ell+1}(x)+\frac{\ell}{2\ell+1}P_{\ell-1}(x)\right]\cdot$$
$$\left[\frac{\ell'+1}{2\ell'+1}P_{\ell'+1}(x)+\frac{\ell'}{2\ell'+1}P_{\ell'-1}(x)\right]$$

Imamo

$$\frac{l+1}{2l+1}\cdot\frac{l'+1}{2l+1}\int P_{l+1}P_{l'+1}\,dx+\frac{l+1}{2l+1}\cdot\frac{l'}{2l'+1}\int P_{l+1}P_{l'-1}\,dx$$

$$+\frac{l}{2l+1}\cdot\frac{l'+1}{2l'+1}\int P_{l-1}P_{l'+1}\,dx+\frac{l}{2l+1}\cdot\frac{l'}{2l'+1}\int P_{l-1}P_{l'-1}\,dx$$

$$=\left(\frac{l+1}{2l+1}\right)^2\cdot\frac{2}{2l+3}\,\delta_{ll'}+\frac{l+1}{2l+1}\cdot\frac{l+2}{2l+5}\cdot\frac{2}{2l+3}\cdot\delta_{l',l+2}$$

$$+\frac{(l'+1)(l'+2)}{(2l'+1)(2l'+5)}\cdot\frac{2}{2l'+3}\,\delta_{l,l'+2}+\left(\frac{l}{2l+1}\right)^2\cdot\frac{2}{2l-1}\,\delta_{ll'}$$

Uvrstimo u izraz za koeficijent C. Prvi i četvrti član daju doprinos sumi

$$2\sum_{l=0}^{\infty}\sin^2\delta_l\cdot\left[\frac{(l+1)^2}{2l+3}+\frac{l^2}{2l-1}\right]=2\sum_{l=0}\sin^2\delta_l\,\frac{4l^3+6l^2-1}{(2l-1)(2l+3)}$$

Drugi i treći član daju

$$2\sum_{l=0}^{\infty}\sin\delta_l\,\sin\delta_{l+2}\cdot(2l+1)(2l+5)\,\frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+5)(2l+3)}\cdot\left[e^{i(\delta_{l+2}-\delta_l)}+e^{-i(\delta_{l+2}-\delta_l)}\right]$$

$$=4\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(l+1)(l+2)}{(2l+3)}\sin\delta_l\,\sin\delta_{l+2}\cos(\delta_{l+2}-\delta_l)$$

Koeficijent C postaje

$$C = \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{K^2} \left\{ \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4\ell^3 + 6\ell^2 - 1}{(2\ell-1)(2\ell+3)} \sin^2 \delta_\ell \right.$$

$$\left. + \sum_{\ell=0}^{\infty} 2 \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{(2\ell+3)} \sin \delta_\ell \sin \delta_{\ell+2} \cos(\delta_{\ell+2} - \delta_\ell) \right\}$$

$$- \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{K^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sin^2 \delta_\ell$$

Možemo još zbrojiti prvu i treću sumu

$$C = \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{K^2} \left\{ \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(2\ell+1)(\ell+1) \cdot \ell}{(2\ell+3)(2\ell-1)} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \sin^2 \delta_\ell \right.$$

$$\left. + \sum_{\ell=0}^{\infty} 2 \cdot \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2\ell+3} \sin \delta_\ell \sin \delta_{\ell+2} \cos(\delta_{\ell+2} - \delta_\ell) \right\}$$