

KOLOKVIJ IZ OBRADJE EKSPERIMENTALNIH PODATAKA U FIZICI

GRUPA A

15.05.2013.

1. Novčić se baca 4 puta. Kolika je vjerojatnost sljedećih događaja:

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \text{pojavi se točno jedno pismo}\}$$

$$B = \{\omega \in \Omega \mid \text{u drugom bacanju pojavi se pismo}\}$$

$$C = \{\omega \in \Omega \mid \text{pojavi se barem jedno pismo}\}$$

$$D = \{\omega \in \Omega \mid \text{pismo se pojavilo barem dvaput}\}$$

2. U jednakokračnom trokutu osnovice a i visine a upisan je kvadrat. Kolika je vjerojatnost da na sreću odabrana točka u trokutu **ne leži** unutar kvadrata?

3. U prvoj posudi nalaze se 3 bijele i 2 crne kuglice, a u drugoj 4 bijele i 2 crne kuglice. Iz prve posude na sreću izaberemo jednu kuglicu i prebacimo je u drugu. Kolika je vjerojatnost da potom izvučena kuglica iz druge posude bude crna?

4. Zadana je razdioba vjerojatnosti slučajnog vektora (X, Y)

X	Y	
	0	1
-1	1/4	1/6
0	1/6	1/8
1	1/8	1/6

- (a) Odredite razdiobu slučajnog vektora (Z, X) ako je $Z = 2X + Y$.
(b) Kolika je uvjetna vjerojatnost $P(Z = 0 \mid X = 1)$?

5. Pri korekturi knjige od 300 stranica primjećeno je 1100 pogrešaka. Koristeći Poissonovu razdiobu izračunajte vjerojatnost da se na pojedinoj stranici nalazi više od 3 greške. Koliki je najvjerojatniji broj grešaka na pojedinoj stranici?

1.

$$P(A) = \binom{4}{1} p^1 z^3 \quad (\text{Bernoullijeva shema})$$

$$= 4 p z^3$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$p = z = \frac{1}{2}$$

Prebrojavanje poročnih za B: fiksiramo dogodaj u drugom bacanju, ostali su proizvoljni

x P x x

$$\text{card}(B) = 2^3$$

$$\text{card}(\Omega) = 2^4$$

$$P(B) = \frac{2^3}{2^4} = \frac{1}{2}$$

$$C^c = \{ \omega \in \Omega \mid \text{primo se nije pojavilo niti jednom} \}$$

$$P(C) = 1 - P(C^c) = 1 - 2^{-4} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{16}$$

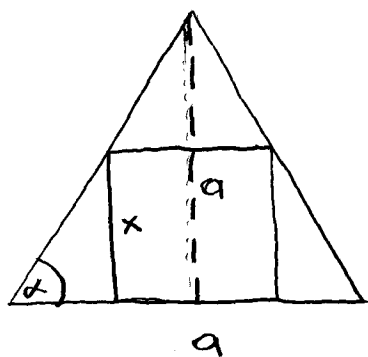
$$D^c = \{ \omega \in \Omega \mid \text{primo se pojavilo najviše jednom} \}$$

$$D^c = A \cup C^c, \quad A \cap C^c = \emptyset$$

$$P(D^c) = 1 - P(A \cup C^c)$$

$$= 1 - (P(A) + P(C^c)) = 1 - \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{11}{16}$$

2.



$$\mu(\mathcal{R}) = \frac{1}{2} a \cdot v = \frac{1}{2} a^2$$

To je površina celotnega trikotnika

$A = \{\omega \in \mathcal{R} \mid \text{odabrane točke ne
leži zunaj kvadrata}\}$

$$\mu(A) = \mu(\mathcal{R}) - \mu(A^c)$$

$\mu(A^c)$ je površina kvadrata

$$\tan \alpha = \frac{a}{a/2} = \frac{x}{a/2 - x/2}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} (a - x) = x$$

$$x = \frac{a}{2}$$

$$\mu(A) = \frac{1}{2} a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\mathcal{R})} = \frac{a^2/4}{a^2/2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

3.

$$H_0 = \{ \omega \in \Omega \mid \text{prebačena kuglica je bijela} \}$$

$$H_1 = \{ \omega \in \Omega \mid \text{prebačena kuglica je crna} \}$$

$$P(H_0) = \frac{3}{5}$$

$$P(H_1) = \frac{2}{5}$$

$$A = \{ \omega \in \Omega \mid \text{kuglica izvučena iz druge potkole je crna} \}$$

$$P(A|H_0) = \frac{2}{7}$$

$$P(A|H_1) = \frac{3}{7}$$

$$P(A) = P(H_0) \cdot P(A|H_0) + P(H_1) \cdot P(A|H_1)$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{35} = 0,3429$$

4.

Vrijednosti za varijablu Z

$$X = -1, Y = 0 \Rightarrow Z = -2$$

$$X = -1, Y = 1 \Rightarrow Z = -1$$

$$X = 0, Y = 0 \Rightarrow Z = 0$$

$$X = 0, Y = 1 \Rightarrow Z = 1$$

$$X = 1, Y = 0 \Rightarrow Z = 2$$

$$X = 1, Y = 1 \Rightarrow Z = 3$$

$Z \backslash X$	-1	0	1
-2	1/4	0	0
-1	1/6	0	0
0	0	1/6	0
1	0	1/8	0
2	0	0	1/8
3	0	0	1/6

(b) uvjetna vjerojatnost

$$\begin{aligned}
 P(Z=0 | X=1) &= \frac{P(Z=0, X=1)}{P_2(X=1)} \\
 &= \frac{0}{\frac{1}{8} + \frac{1}{6}} = 0
 \end{aligned}$$

X broj grešaka po stranici

očekivani broj grešaka po stranici

$$m_X = \lambda = \frac{1100}{300} = \frac{11}{3}$$

Vjerovatnost da na pojedinoj stranici nastane više od 3 greške

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$$

$$= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3)$$

$$= 1 - \left(\frac{11}{3}\right)^0 \cdot \frac{1}{0!} e^{-\frac{11}{3}} - \left(\frac{11}{3}\right)^1 \cdot \frac{1}{1!} e^{-\frac{11}{3}}$$

$$- \left(\frac{11}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} e^{-\frac{11}{3}} - \left(\frac{11}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} e^{-\frac{11}{3}}$$

$$= 1 - e^{-\frac{11}{3}} \cdot \left[1 + \frac{11}{3} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{11}{3}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{11}{3}\right)^3 \right]$$

$$= 0,4989$$

Uvjeti:

$$P_{k-1} \leq P_k \Rightarrow \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} \leq \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$k \leq \lambda$$

$$P_{k+1} \leq P_k \Rightarrow \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda} \leq \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\lambda \leq k+1$$

Imamo,

$$\lambda - 1 \leq k_{\max} \leq \lambda$$

$$\frac{8}{3} \leq k_{\max} \leq \frac{11}{3} \Rightarrow k_{\max} = 3$$