KOLOKVIJ IZ OBRADE EKSPERIMENTALNIH PODATAKA U FIZICI

GRUPA B

15.05.2013.

1. Kolika je vjerojatnost da se pri bacanju dviju kocki ostvare sljedeći događaji:

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \text{zbroj koji se pojavio je 8}\}$$

$$B = \{\omega \in \Omega \mid \text{pojavila se barem jedna četvorka}\}$$

$$C = \{\omega \in \Omega \mid \text{zbroj koji se pojavio veći je od 9}\}$$

$$D = \{\omega \in \Omega \mid \text{broj koji se pojavio djeljiv je s brojem 2 ili s brojem 3}\}$$

2. Zadani su pozitivni brojevi a, b gdje je $a < b$. Ako se nasumice na dužini duljine b izaberu dvije točke, kolika je vjerojatnost da njihova udaljenost bude barem a?

3. U prvoj posudi nalaze se 2 bijele i 4 plave, a u drugoj 3 bijele i 2 plave kuglice. Iz prve posude nasumice izaberemo 2 kuglice i prebacimo ih u drugu. Kolika je vjerojatnost da potom izvučena kuglica iz druge posude bude bijela?

4. Zadana je razdioba vjerojatnosti slučajnog vektora (X, Y)

X \ Y	0	1
–1	1/4	1/6
0	1/6	1/8
1	1/8	1/6

(a) Odredite razdiobu slučajnog vektora (T, Y) ako je $T = 2X - Y$.
(b) Kolika je uvjetna vjerojatnost $P(T = 2 \mid Y = 0)$?

5. (a) Slučajna varijabla X ima binomnu razdiobu $\mathcal{B}(n,p)$. Koja je najvjerojatnija realizacija slučajne varijable X ?
(b) Koliko puta moramo baciti kocku da bi najvjerojatniji broj pojavljivanja šestice bio 10?
***Uputa*:** pod (a) potražite k za kojeg vrijedi $p_{k-1} \le p_k$ i $p_k \ge p_{k+1}$.

$\boxed{1}$

$\text{card } \Omega = 36$

$A = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$

$P(A) = \frac{5}{36}$

$B = \{(4,1),(4,2),\dots,(4,6),(1,4),(2,4),\dots,(6,4)\}$; $\text{card } B = 11$

$P(B) = \frac{11}{36}$

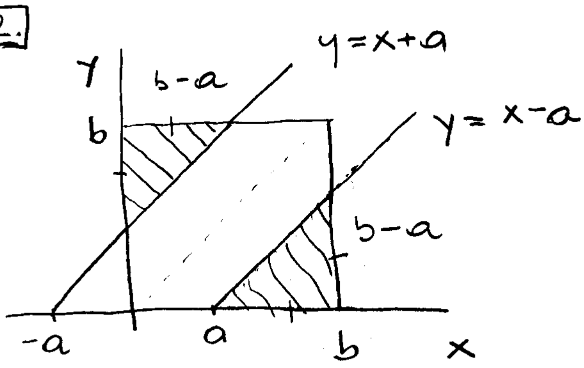
$C = \{(4,6),(5,5),(6,4),(6,5),(5,6),(6,6)\}$

$P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$D^c = \{(1,1),(1,5),(5,1),(5,5)\}$

$P(D) = 1 - P(D^c) = 1 - \frac{4}{36} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$

2.



$$|x-y| \geq a$$

$$x-y \geq a \Rightarrow x-a \geq y$$

$$-(x-y) \geq a \Rightarrow y \geq x+a$$

$A = \{ \omega \in \Omega \mid$ odabrane točke zadovoljavaju jednakost $|x-y| \geq a \}$

$\mu(\Omega) = b^2$ ukupna površina kvadrata

$$\mu(A) = 2 \cdot \frac{(b-a)^2}{2} = (b-a)^2$$

$$P(A) = \frac{(b-a)^2}{b^2} = \left(1 - \frac{a}{b}\right)^2$$

$a \to 0$; $P(A) \to 1$ ✓

$a \to b$, $P(A) \to 0$ ✓ ok!

3.

U prvoj posudi nalaze se 2 bijele i 4 plave, a u drugoj 3 bijele i 2 plave kuglice. Iz prve posude nasumice izaberemo dvije kuglice i prebacimo ih u drugu. Kolika je vjerojatnost da potom izvučena kuglica iz druge posude bude bijela?

$H_0 = \{\omega \in \Omega \mid$ niti jedna prebačena kuglica nije bijela$\}$

$H_1 = \{\omega \in \Omega \mid$ jedna prebačena kuglica je bijela$\}$

$H_2 = \{\omega \in \Omega \mid$ obje prebačene kuglice su bijele$\}$

$P(H_0) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5}$ (tj. obje izabrane kuglice su plave)

$P(H_1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$

ili

jedna bijela

jedna plave

jedna bijela jedna plave

$P(H_2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}$

$A = \{\omega \in \Omega \mid$ kuglica izvučena iz druge posude je bijela$\}$

Uvjetne vjerojatnosti:

$P(A \mid H_0) = \frac{3}{7}$

$P(A \mid H_1) = \frac{4}{7}$

$P(A \mid H_2) = \frac{5}{7}$

Formula potpune vjerojatnosti:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{2} P(H_i)\,P(A|H_i) = \frac{12}{30}\cdot\frac{3}{7} + \frac{8}{15}\cdot\frac{4}{7} + \frac{2}{30}\cdot\frac{5}{7}$$

$$= \frac{11}{21}$$

4.

(a) $X=-1,\ Y=0 \Rightarrow T=-2$

$X=-1,\ Y=1 \Rightarrow T=-3$

$X=0,\ Y=0 \Rightarrow T=0$

$X=0,\ Y=1 \Rightarrow T=-1$

$X=1,\ Y=0 \Rightarrow T=2$

$X=1,\ Y=1 \Rightarrow T=1$

T \ Y	0	1
−3	0	1/6
−2	1/4	0
−1	0	1/8
0	1/6	0
1	0	1/6
2	1/8	0

(b)

$$P(T=2 \mid Y=0) = \frac{P(T=2, Y=0)}{P_1(Y=0)}$$

$$= \frac{1/8}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{6+4+3}{24}}$$

$$= \frac{3}{13}$$

5.

(a) $P_{k-1} \leq P_k$

$$\binom{n}{k-1} p^{k-1} 2^{n-k+1} \leq \binom{n}{k} p^k 2^{n-k}$$

$$\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} p^{k-1} 2^{n-k+1} \leq \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k 2^{n-k}$$

$$\frac{2}{p} \leq \frac{n-k+1}{k} \Rightarrow k2 \leq (n-k+1)p$$

$$k\underbrace{(p+2)}_{=1} \leq (n+1)p$$

$P_k \geq P_{k+1}$

$$\binom{n}{k} p^k 2^{n-k} \geq \binom{n}{k+1} p^{k+1} 2^{n-k-1}$$

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k 2^{n-k} \geq \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} p^{k+1} 2^{n-k-1}$$

$$\frac{k+1}{n-k} \geq \frac{p}{2} \Rightarrow 2(k+1) \geq p(n-k)$$

$$k\underbrace{(2+p)}_{1} \geq np-2$$

Imamo,

$$np-2 \leq k_{max} \leq np+p$$

$$np+p-1 \leq k_{max} \leq np+p$$

$$(n+1)p-1 \leq k_{max} \leq (n+1)p$$

(b) $p = \frac{1}{6}$

$k_{max} = 10$

$$\frac{k_{max}}{p} - 1 \leq n \Rightarrow 59 \leq n$$

$$\frac{k_{max}+1}{p} - 1 \geq n \Rightarrow \frac{11}{\frac{1}{6}} - 1 = 65 \geq n$$

Kocke moramo baciti između 59 i 65 puta.

$\boxed{5.}$

$$\theta_X = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \cdot p_k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \cdot p 2^k$$

$$= p \sum_{k=0}^{\infty} (2e^{it})^k = \frac{p}{1-2e^{it}}$$

$$E(X) = -i\,\theta_X'(0)$$

$$= -ip\,(-1)(1-2e^{it})^{-2} \cdot (-i2)e^{it} \Big|_{t=0}$$

$$= p(1-2)^{-2} \cdot 2$$

$$= \frac{1}{p}(1-p) = \frac{1}{p} - 1$$