

KOLOKVIJ IZ OBRADE EKSPERIMENTALNIH PODATAKA U FIZICI

GRUPA A

05.07.2013.

1. Jednolika razdioba neprekinute slučajne varijable X ima sljedeću gustoću:

$$f(x) = \frac{A}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$$

Izračunajte:

- (a) Konstantu normiranja A .
- (b) Očekivanje i disperziju za X .

2. Masa nekog proizvoda ravna se po normalnoj razdiobi. Prosječna vrijednost je 1000 g, a 10% proizvoda ima masu veću od 1020 g. Odredite simetrični interval oko prosječne vrijednosti unutar kojeg se s vjerojatnošću 99% nalazi masa tog proizvoda.

3. Nenegativna slučajna varijabla X ima matematičko očekivanje $E(X) = 1$ i standardnu devijaciju $\sigma(X) = 0,4$. Pokažite da je vjerojatnost događaja $A = \{X < 3\}$ veća od 95%.

Uputa: upotrijebite nejednakost Čebiševa.

4. Izmjerene su visine 30 ljudi i dobiveni su rezultati:

x_i (cm)	171	173	174	175	176	177	178	179	181	183	187
n_i	2	1	1	3	8	6	3	3	1	1	1

Izračunajte:

- (a) Aritmetičku sredinu i standardnu devijaciju.
- (b) Mod i medijan.

5. Unutar dužine duljine 2 na sreću je odabrana točka koja ju dijeli na dva dijela. Neka je slučajna varijabla X površina pravokutnog trokuta čije su katete dva dijela dužine. Odredi i skiciraj funkciju razdiobe vjerojatnosti $F(x)$.

Uputa: neka je a duljina određena na sreću odabranom točkom. Površina pravokutnog trokuta je $x = a(2 - a)/2$. Time smo promijenili slučajnu varijablu. Birajte a iz intervala $[0, 1]$ jer su vjerojatnosti da dobijemo površinu x jednake u slučaju da odaberemo duljinu a ili ako odaberemo duljinu $(2 - a)$.

1.

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$\frac{A}{b-a} \int_a^b dx = \frac{A}{b-a} \cdot (b-a) = 1$$

$$\Rightarrow A = \underline{\underline{1}}$$

$$(b) E(X) = \int_a^b \frac{1}{b-a} x dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2} (b^2 - a^2) = \underline{\underline{\frac{a+b}{2}}}$$

$$D(X) = E(X^2) - m_x^2$$

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{1}{b-a} x^2 dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{3} (b^3 - a^3) \\ = \frac{1}{3} (a^2 + ab + b^2)$$

$$m_x^2 = \frac{1}{4} (a^2 + 2ab + b^2)$$

$$D(X) = \frac{1}{12} (a^2 + b^2) - \frac{1}{6} ab = \underline{\underline{\frac{1}{12} (b-a)^2}}$$

2.

X - masa proizvoda

$$X \sim W(1000, \sigma^2); \quad \sigma = ?$$

$$P(X > 1020) = 1 - P(X \leq 1020)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{1020 - 1000}{\sigma}\right) = 0,1$$

$$\Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right) = 0,9 \Rightarrow \frac{20}{\sigma} = 1,28$$

$$\sigma = 15,625$$

$$\begin{aligned} P(a-c \leq X \leq a+c) &= \Phi\left(+\frac{c}{\sigma}\right) - \underbrace{\Phi\left(-\frac{c}{\sigma}\right)}_{1 - \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right)} \\ &= 2\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - 1 = 0,99 \end{aligned}$$

$$\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) = 0,995$$

$$\frac{c}{\sigma} = 2,6$$

$$\begin{aligned} c &= 2,6 \cdot 15,625 = \\ &= 40,625 \end{aligned}$$

Traženi interval je

$$(959,37; 1040,63)$$

3.

Čebiševska nejednakost

$$P(|X - m_X| \geq \epsilon) \leq \frac{D(X)}{\epsilon^2}$$

$$P(X < 3) = 1 - P(X \geq 3)$$

$$P(X \geq 3) = P(X - \underbrace{m_X}_{=1} \geq \underbrace{2}_{\epsilon}) \leq \frac{0,4^2 = D(X)}{2^2} = 0,04$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) \leq 0,04$$

$$\Rightarrow P(X < 3) \geq \underline{\underline{0,96}}$$

4. Kalkulator

$$(a) \bar{X} = 176,87_{\underline{\underline{=}}}$$

$$S_x = 3,07$$

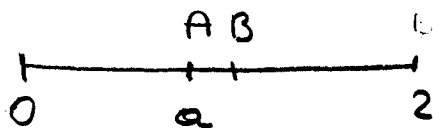
$$(b) M_o = 176_{\underline{\underline{=}}}$$

$$M_e = \frac{1}{2} (x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}) ; n \text{ par } ; n = 30$$

$$= \frac{1}{2} (176 + 177) = 176,5_{\underline{\underline{=}}}$$

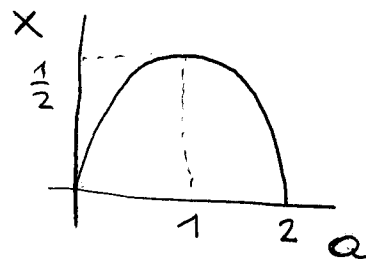
5.

Neka je odabrana dužina a .



Površina kojom odgovara je

$$X = \frac{1}{2} a(2-a)$$



Ovoj površini također odgovara odabrana dužina $2-a$.

Dovoljno je da znamo a iz $[0,1]$.

$$2X = 2a - a^2$$

$$a^2 - 2a + 2X = 0$$

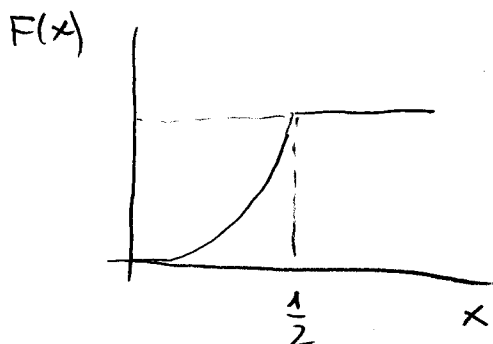
$$a = 1 \pm \sqrt{1-2X}$$

Ako je $a \in [0,1]$ uzet ćemo

$$a = 1 - \sqrt{1-2X}$$

pri čemu $X \in [0, \frac{1}{2}]$. Vjerovatnost je onda

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{\mu(OA)}{\mu(OB)} = \frac{1 - \sqrt{1-2x}}{1} = 1 - \sqrt{1-2x}$$



$$F(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-2x} & ; 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & ; x \geq \frac{1}{2} \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases}$$