KOLOKVIJ IZ OBRADE EKSPERIMENTALNIH PODATAKA U FIZICI

GRUPA B

05.07.2013.

1. Neprekinuta slučajna varijabla X zadana je gustoćom

$$f(x) = C\cos 2x, \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$$

(a) Odredite konstantu normiranja C.
(b) Odredite funkciju razdiobe F.
(c) Izračunajte vjerojatnost događaja $\{0 < X < \pi/2\}$.

2. Vjerojatnost rođenja dječaka približno je jednaka 0,515. Kolika je vjerojatnost da među 10 000 novorođene djece bude više djevojčica?
***Uputa*:** aproksimirajte binomnu razdiobu normalnom.

3. Matematičko očekivanje i standardna devijacija brzine vjetra na nekoj visini su jednaki: $E(X) = 25$ km h^{-1} , $\sigma(X) = 4{,}5$ km h^{-1} . Kolika se brzina vjetra može očekivati na toj visini s vjerojatnošću ne manjom od 0,9?
***Uputa*:** upotrijebite nejednakost Čebiševa.

4. Razdioba bodova na pismenom ispitu iz Linearne algebre 2 zadana je tablicom:

x_i	31 – 40	41 – 50	51 – 60	61 – 70	71 – 80	81 – 90	91 – 100
n_i	1	3	11	21	43	32	9

Izračunajte:
(a) Sredine razreda.
(b) Aritmetičku sredinu i standardnu devijaciju.

5. Kružnica k polumjera R podijeljena je promjerom na dvije polukružnice. Točku T_1 biramo na sreću na jednoj, a točku T_2 na drugoj polukružnici. Slučajna varijabla X je udaljenost točaka T_1 i T_2 . Odredite i skicirajte pripadnu funkciju razdiobe vjerojatnosti $F(x)$.
***Uputa*:** koordinate točke T_1 su ($R\cos\alpha_1$, $R\sin\alpha_1$), a točke T_2 su ($R\cos\alpha_2$, $R\sin\alpha_2$) gdje kutovi α_1 i α_2 , na primjer, poprimaju vrijednosti iz intervala $[0, \pi)$ i $[\pi, 2\pi)$, respektivno. Razdiobu vjerojatnost potražite kao geometrijsku vjerojatnost $F(x) = P(X < d) = \mu(A)/\mu(\Omega)$ gdje su A i Ω skupovi u $\mathbb{R}^2$ koji sadrže uređene parove (α_1, α_2), a d vrijednost slučajne varijable X (udaljenost između točaka). Uzmite u obzir jednakosti $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$, $\sin x = \sin(\pi - x)$ te nađite $d = f(\alpha_1, \alpha_2)$ tj. promijenite slučajnu varijablu.

1.

Konstantu C odredit ćemo iz uvjeta normalizacije

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$C\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2x\,dx = C\,\frac{\sin 2x}{2}\Big/_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{C}{2}\left(1-(-1)\right) = C$$

$$\Rightarrow \quad C = 1$$

Funkcija razdiobe

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$x \in \left(-\infty, -\frac{\pi}{4}\right)$; $F(x) = 0$

$x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$; $F(x) = \int_{-\pi/4}^{x} \cos 2x\,dx = \frac{\sin 2x}{2}\Big/_{-\pi/4}^{x}$

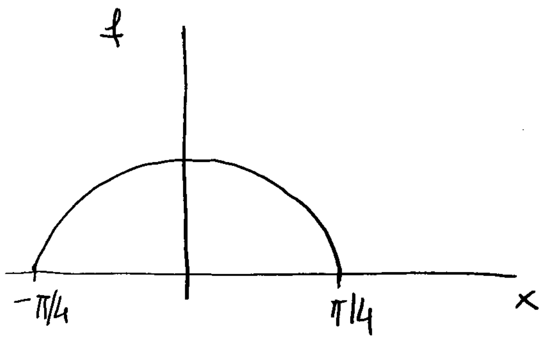
$$= \frac{1}{2}\left(\sin 2x - \sin 2\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

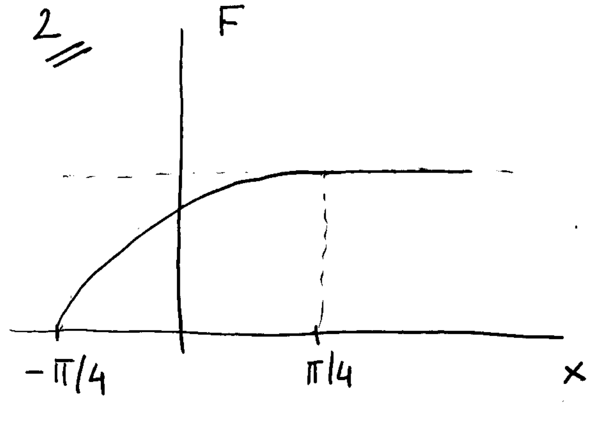
$$= \frac{1}{2}\left(\sin 2x + 1\right)$$

$x \in \left(\frac{\pi}{4}, +\infty\right)$; $F(x) = 1$

$$P\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$





2.

Aproksimacija binomne varijable normalnom

$n = 10\,000$

$p = 0{,}515$

X – broj rođenih dječaka

$E(X) = n \cdot p = 5150$

$D(X) = npq = 2497{,}75$

$\sigma = \sqrt{npq} = 49{,}977$

$B(10\,000;\, 0{,}515) \longrightarrow N(5150;\, 2497{,}75)$

Tražimo vjerojatnost da između 10 000 rođene djece bude manje dječaka

$$P(X < 5000) = \Phi\left(\frac{5000 - 5150}{49{,}977}\right)$$

$$= \Phi(-3) = 1 - \Phi(3) = 1 - 0{,}9987$$

$$= 0{,}0013$$

3. X dužina vjetra

Čebiševljeva nejednakost

$$P(|X-m_x| \geq \epsilon) \leq \frac{D(X)}{\epsilon^2}$$

$$P(|X-m_x| < \epsilon) \geqslant 0{,}9$$

$$1-P(|X-m_x| \geq \epsilon) \geq 0{,}9$$

$$P(|X-m_x| \geq \epsilon) \leq 0{,}1$$

Možemo uzeti:

$$0{,}1 \leq \frac{D(X)}{\epsilon^2}$$

$$\epsilon^2 \leq \frac{4{,}5^2}{0{,}1} = 202{,}5$$

$$\epsilon \leq 14{,}23$$

$$m_x - \epsilon < X < m_x + \epsilon$$

$$10{,}77 < X < 39{,}23$$

4.

(a) Sredine razreda

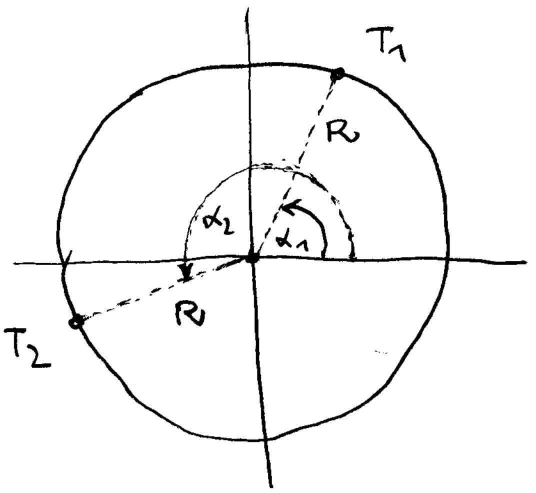
a_i	35,5	45,5	55,5	65,5	75,5	85,5	95,5
n_i	1	3	11	21	43	32	9

(b) $\bar{x} = 75$

$\sigma_x = 12$

$\boxed{5.}$

Pretpostavimo da točku T_1 biramo iz intervala $[0,\pi)$, a točku T_2 iz intervala $[\pi, 2\pi)$. Kutove koji određuju položaj pojedine točke označimo s α_1 i α_2.



$$T_1 = (R\cos\alpha_1, R\sin\alpha_1)$$

$$T_2 = (R\cos\alpha_2, R\sin\alpha_2)$$

$$\alpha_1 \in [0, \pi)$$

$$\alpha_2 \in [\pi, 2\pi)$$

X udaljenost između točaka

$$x^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

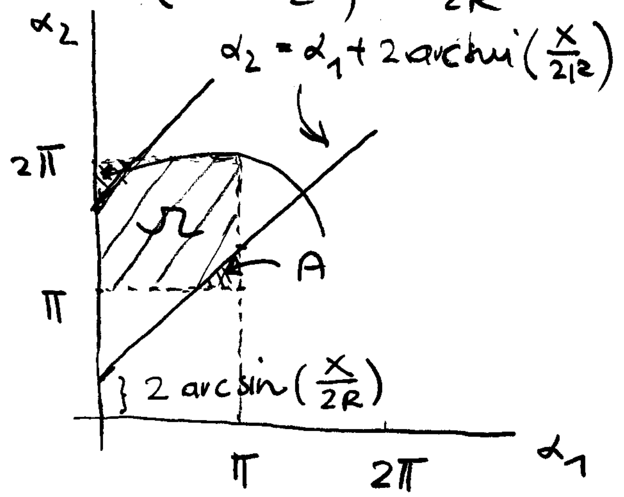
$$= R^2\left[(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)^2 + (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)^2\right]$$

$$\cos^2\alpha_2 + \sin^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_1 - 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - 2\sin\alpha_1\sin\alpha_2$$

$$= 2\left(1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)\right) = 4\sin^2\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) = \frac{x}{2R} \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_1 + 2\arcsin\left(\frac{x}{2R}\right)$$

$$\sin\left(\pi - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) = \frac{x}{2R} \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_1 + \left[2\pi - 2\arcsin\left(\frac{x}{2R}\right)\right]$$



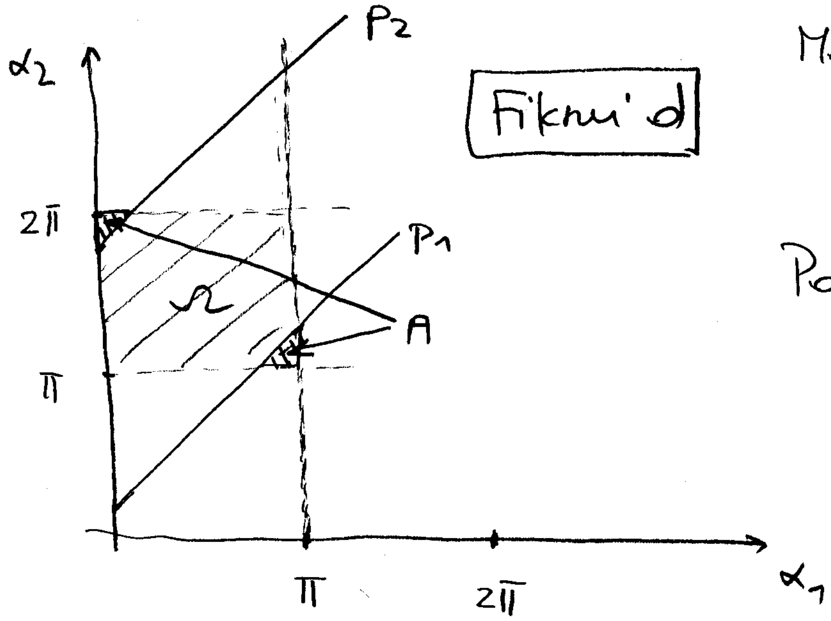
Mogući događaji:

$$\mu(\Omega) = \pi^2$$

Povoljni događaji:

$$\mu(A) = 4\arcsin^2\left(\frac{x}{2R}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$+$$



$\boxed{\text{Fiksni } d}$

Mogući događaji

$$\mu(\Omega) = \pi^2$$

Povoljni događaji:

$$\mu(A) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \arcsin^2\left(\frac{d}{2R}\right)$$

$$F(d) = P(X < d) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{4 \arcsin^2\left(\frac{d}{2R}\right)}{\pi^2}$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \arcsin^2\left(\frac{d}{2R}\right) \quad ; \quad 0 \le d \le 2R$$

$$F(d) = 0 \quad , \text{ inače}$$