

## OSNOVE MATEMATIKE

Prvi kolokvij 25. 11. 2024.

## ZADATAK 1

Kišna kapljica početne mase  $m_0$  slobodno pada zrakom prema površini Zemlje. Promjena mase kapljice, zbog isparavanja, proporcionalna je vremenu,  $\Delta m = -kt$ , gdje je  $k$  konstanta.

(a) Nađite vrijeme za koje će kinetička energija kapljice postati maksimalna ako se kapljica počela gibati iz mirovanja, bez početne brzine.

(b) Kolika je maksimalna kinetička energija kapljice?

Utjecaj otpora zraka na gibanje čestice smijete zanemariti.

## ZADATAK 2

Nađite rješenje diferencijalne jednadžbe drugog reda

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 9y = 0$$

koje zadovoljava početni uvjet  $y(0) = 0$  i  $y'(0) = 6$ .

## ZADATAK 3

Za vektore  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  vrijedi:  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ . Izračunajte  $|\vec{c}|$  ako je  $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$ .

## ZADATAK 4

Napišite jednadžbu hiperbole kojoj je žarište u točki  $F_1 = (-2, 0)$ , a pravac  $y = 2x$  asimptota.

## ZADATAK 5

Pokažite da je

$$r = \frac{1}{1 - \sin \phi}$$

polarna jednadžba parabole. Nađite poluparametar  $p$ . Skicirajte kako izgleda ova krivulja; na primjer, za crtanje odaberite kutove  $0, \pi/6, \pi/2, 5\pi/6, \pi$ .

Z1.1

Masa kapičice u trenutku  $t$ :  $m(t) = m_0 - kt$ ,  $k > 0$

Bizna kapičice u trenutku  $t$ :  $v = gt$

(a)

Kinetičke energije

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = (m_0 - kt) g^2 t^2 \cdot \frac{1}{2}$$

Tražimo stacionarnu točku:  $dE_k/dt = 0$

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m_0 g^2 t^2 - \frac{1}{2} k g^2 t^3 \right)$$

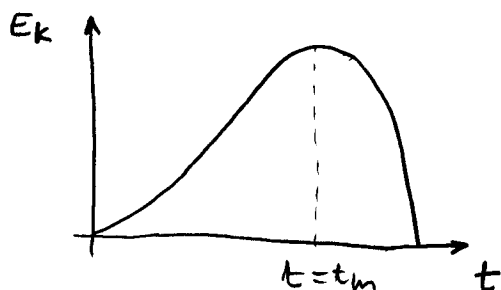
$$= m_0 g^2 t - \frac{1}{2} k g^2 \cdot 3t^2 = 0 \Rightarrow t_m = \frac{2m_0}{3k}$$

(b) Njema tu 'dot' je maksimalna kinetička energija.

Računamo li kinetičku energiju na dva načina

$$\frac{1}{2} m_0 g^2 t^2 - \frac{1}{2} k g^2 t^3 \geq 0$$

vidimo da se  $E_k(t)$  ponaša kao parabola sa davanjem  
mali  $t$ , no kasnije prelazi dugo ilan koji pada  
kao  $-t^3$ .



$$\begin{aligned} E_k(t_m) &= \frac{1}{2} m_0 g^2 \left( \frac{2m_0}{3k} \right)^2 - \frac{1}{2} k g^2 \left( \frac{2m_0}{3k} \right)^3 = \frac{m_0^3 g^2}{2k^2} \left( \frac{4}{9} - \frac{8}{27} \right) \\ &= \frac{2}{27} \frac{m_0^3 g^2}{k^2} \end{aligned}$$

2.

Uvrtamo li  $y = e^{\lambda x}$  dođemo

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - 9 e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x} (\lambda^2 - 9) = 0$$

Rješenje za  $\lambda$  su

$$\lambda_1 = 3$$

$$\lambda_2 = -3$$

Prima tome, opće rješenje diferencijalne jednačine je

$$y_H = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$$

Uvrtamo li početne uvjete, imamo

$$y_H(0) = C_1 + C_2 = 0$$

$$y_H'(0) = 3C_1 - 3C_2 = 6$$

Odvodje je

$$C_2 = -C_1$$

$$3C_1 - 3(-C_1) = 6C_1 = 6$$

$$C_1 = 1$$

$$C_2 = -1$$

Rezultat :

$$y = e^{3x} - e^{-3x}$$

3.

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c} \cdot \vec{c}}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = (3\vec{a} - \vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b}) = 9\vec{a}^2 - 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

$$= 9 - 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ - 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ + 4$$

$$= 9 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 = 7$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{7}$$

4.

Za hipersolu je linearni ekscentricitet

$$e^2 = a^2 + b^2$$

Budući je  $F_1 = (-e, 0)$  vidimo da je

$$e = 2$$

S druge strane je koeficijent supruva asimptote  $\pm b/a$  pa vrijedi

$$\pm \frac{b}{a} = 2$$

$$b = \pm 2a$$

Iz ove druge jednačine

$$a^2 + (\pm 2a)^2 = 4$$

$$5a^2 = 4 \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

dakle je

$$b = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Jednačina hipersole je

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$\frac{16}{5} x^2 - \frac{4}{5} y^2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{16}{5} \quad / : 4 / \cdot 25$$

$$\boxed{20x^2 - 5y^2 = 16}$$

5.

Zadani polarni jednadžbi kame možemo pisati u obliku

$$r = \frac{1}{1 - \cos(\frac{\pi}{2} - \phi)}$$

Odatje usporedim s

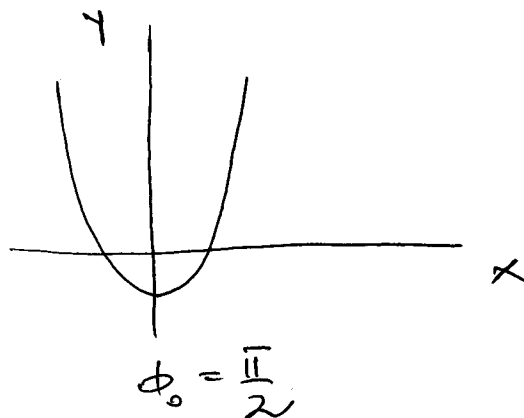
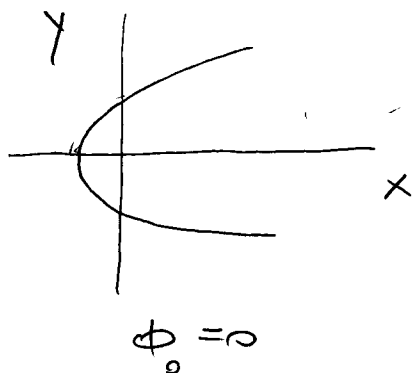
$$r(\phi) = \frac{p}{1 - \epsilon \cos(\phi - \phi_0)}$$

možemo pročitati da je

$$p = 1$$

$$\epsilon = 1 \text{ (parabola)}$$

Također primjećujemo da parabola rotirana za kut  $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$



U to ne možemo ugoviti uvrstimo li zadane kutove

$$\phi = 0 \Rightarrow r = 1$$

$$\phi = \pi/6 \Rightarrow r = 2$$

$$\phi = \pi/2 \Rightarrow r \rightarrow \infty$$

$$\phi = 5\pi/6 \Rightarrow r = 2$$

$$\phi = \pi \Rightarrow r = 1$$

$$\phi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

