

OSNOVE MATEMATIKE

Drugi kolokvij 29. 1. 2025.

ZADATAK 1

Ako su A i B izjave, pokažite da je donja složena izjava tautologija koristeći tablicu istinitosti

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$$
ZADATAK 2

Dokažite da za paritativni skup $\mathcal{P}$ vrijedi:

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

$$\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$

ZADATAK 3

(a) Ako je $ab = c^2$, pokažite da tada vrijedi

$$\log_{ab} c = \frac{1}{2}$$

(b) Dokaži da za svaki prirodni broj n vrijedi nejednakost

$$\frac{\log 1 + \log 2 + \dots + \log n + \log(n+1)}{n+1} > \frac{\log 1 + \log 2 + \dots + \log n}{n}$$

Uputa: najprije se uvjerite da vrijedi

$$[1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1)]^n > (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n)^{n+1}$$

ZADATAK 4

Riješite trigonometrijsku jednadžbu

$$12 \cos x - 5 \sin x = -13$$

ZADATAK 5

Riješite jednadžbu

$$z^3 = -1 + i$$

1.

Primiremos da je

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) = A \Leftrightarrow B$$

Prema tome, treba pokazati da je tautologija

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$$

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$
0	0	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	1	1

Kao što se može videti iz gornje tabele, izraz je tačan neovisno o tome jesu li A i B tačni ili netačni! To je tautologija.

2.

$$\underline{P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)}$$

$$x \in P(A \cap B) \Rightarrow x \subseteq A \cap B \Rightarrow (x \subseteq A) \wedge (x \subseteq B)$$

Ako je $x \subseteq A$ tada je $x \in P(A)$, istovremeno $x \subseteq B$ tada je $x \in P(B)$. Odatle: $x \in P(A) \cap P(B)$

$$\text{Dakle smo: } P(A \cap B) \subseteq P(A) \cap P(B) \checkmark$$

$$\underline{\text{Suprotno:}} \text{ neka je } x \in P(A) \cap P(B) \Rightarrow x \in P(A) \wedge x \in P(B)$$

Odatle: $(x \subseteq A) \wedge (x \subseteq B)$ što znači da je $x \subseteq A \cap B$

Možemo zaključiti: $x \in P(A \cap B)$ i onda

$$P(A) \cap P(B) \subseteq P(A \cap B) \checkmark$$

Tine smo pokazali da je

$$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B) \checkmark$$

$$\underline{P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)}$$

$$x \in P(A) \cup P(B) \Rightarrow (x \in P(A)) \vee (x \in P(B))$$

$$\text{Uzmimo najprije: } x \in P(A) \Rightarrow x \subseteq A \Rightarrow x \subseteq A \cup B \\ \Rightarrow x \in P(A \cup B) \checkmark$$

$$\text{Uzmimo tako: } x \in P(B) \Rightarrow x \subseteq B \Rightarrow x \subseteq A \cup B \\ \Rightarrow x \in P(A \cup B) \checkmark$$

Dakle smo da je

$$P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$$

Zašto ne može biti jednakost? Treba pokazati da općenito ne vrijedi.

$$P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)$$

Pretpostavimo da gouye istort vrijedi. Tada bi vrijedilo

$$x \in P(A \cup B) \Rightarrow x \in P(A) \vee x \in P(B)$$

Ako je $x \in P(A) \Rightarrow x \subseteq A$, ako je $x \in P(B) \Rightarrow x \subseteq B$.

Pretpostavimo da x sadrži neke elemente skupa A i neke elemente skupa B . Tada je $x \subseteq A \cup B$ i $x \in P(A \cup B)$.

Budući da x uže podskup od A i nije podskup od B ,
to je kontradikcija za tvrdnju potrebnu valovitem crtaem.

3.

(a) Neka je $ab = c^2$. Logaritmus ove strane jednakite po bazi ab

$$\underbrace{\log_{ab} ab}_{=1} = \underbrace{\log_{ab} c^2}_{2 \log_{ab} c} = 2 \log_{ab} c$$

Odatye;

$$\log_{ab} c = \frac{1}{2}$$

(b) Pokažimo naprue da vrijedi

$$(n+1)^n > 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

Očito, zbog $n+1 > 1, n+1 > 2, \dots, n+1 > n$ ove jednakost vrijedi. Pomnožimo ove strane jednakosti pozitivnim brojem

$$[1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n]^n$$

Dobivamo

$$[1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n]^n (n+1)^n = [1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1)]^n > [1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n]^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = [1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n]^{n+1}$$

pa je

$$[1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n+1)]^n > [1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n]^{n+1}$$

Logaritmujući ovu nejednakost

$$\begin{aligned} \log [1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n+1)]^n &= n \log [1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n+1)] = \\ &= n \cdot [\log 1 + \log 2 + \dots + \log (n+1)] > \\ \log [1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n]^{n+1} &= (n+1) \log [1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n] = \end{aligned}$$

$$= (n+1) [\log 1 + \log 2 + \dots + \log n]$$

Из предыдущей оценки, получаем $\sim n(n+1)$

$$\frac{\log 1 + \log 2 + \dots + \log (n+1)}{n+1} > \frac{\log 1 + \log 2 + \dots + \log n}{n}$$

PRIMJER 3

Jednađbe oblika

$$a \sin \omega x + b \cos \omega x = c, \quad a, b \neq 0$$

Podijelimo obje strane jednađbe s

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \omega x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \omega x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Uvedemo nove funkcije:

$$\sin \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$$

$$\sin \omega x \cos \phi + \sin \phi \cos \omega x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin(\omega x + \phi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ova se jednađba može riješiti:

$$12 \cos x - 5 \sin x = -13$$

Podijelimo jednađbu s

$$\sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$-\frac{5}{13} \sin x + \frac{12}{13} \cos x = -1$$

$$\cos \phi = -\frac{5}{13}$$

$$\sin \phi = \frac{12}{13} \Rightarrow \phi = \arcsin \frac{12}{13}$$

$$\omega = 1;$$

$$\sin(x + \phi) = -1$$

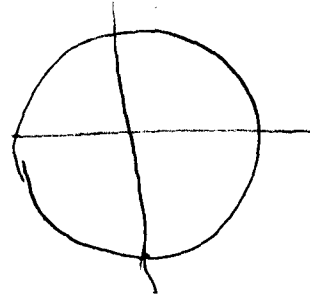
$$x + \phi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x = - \underbrace{\arcsin \frac{12}{13} + \frac{3\pi}{2}} + 2k\pi$$

$$= -\arccos\left(\frac{12}{13}\right) + \pi(2k+1)$$

gdy $\sin$ jest ujemny

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$



z je poznat; napišimo ga u eksponencijalnoj obliku

$$z = r e^{i\phi} = r e^{i(\phi + 2\pi k)}; \quad k \in \mathbb{Z}$$

Imamo,

$$w_k = \sqrt[n]{r e^{i(\phi + 2\pi k)}} = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}k)}$$

ili: $w_k = \sqrt[n]{r} [\cos(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}k) + i \sin(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}k)]$ $k = \{0, 1, \dots, n-1\}$

Naime, za $k \geq n$, na primjer $k = n$

$$e^{i(\frac{\phi}{n} + 2\pi)} = e^{i\frac{\phi}{n}} \text{ to je isto kao za } k=0$$

za $k = n+1$

$$\begin{aligned} e^{i[\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}(n+1)]} &= e^{i[\frac{\phi}{n} + 2\pi + \frac{2\pi}{n}]} \\ &= e^{i[\frac{\phi + 2\pi}{n} + 2\pi]} \end{aligned}$$

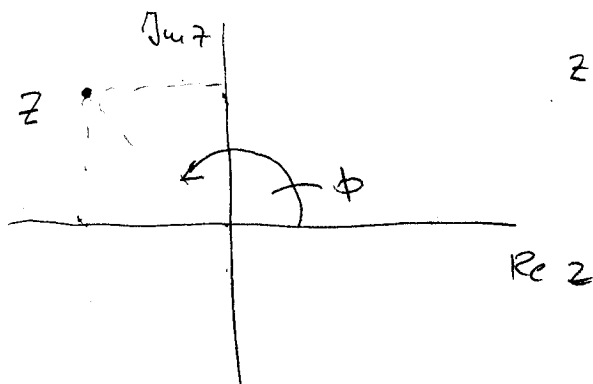
to je isto kao za $k=1$

Itd. nađemo se na isto kao za

$$\text{koje je } k = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

PRIMER 4

Odredi: $\sqrt[3]{-1+i}$



$$z = -1 + i$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan \phi = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\phi = \frac{3\pi}{4}$$

Imat četrus 3 rešenja: $k=0,1,2$

$$w_0 = \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4 \cdot 3}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4 \cdot 3}\right) \right]$$

$$\frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4} \qquad \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$$

$$w_0 = \sqrt[6]{2} \cdot \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right]$$

Slično,

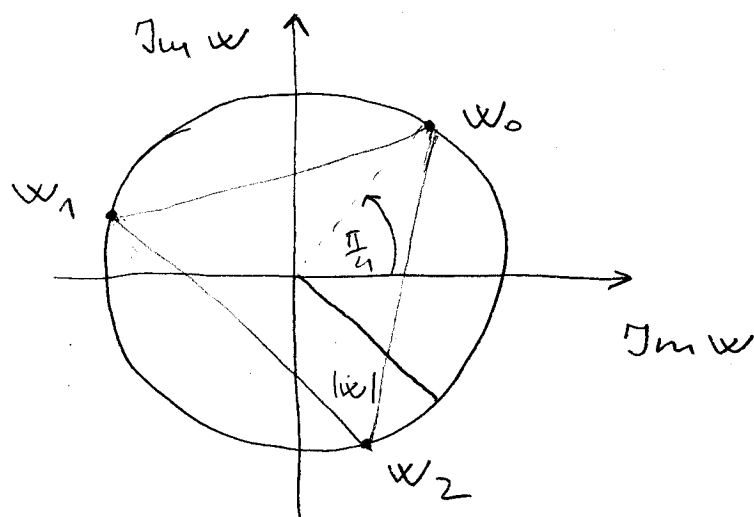
$$w_1 = \sqrt[6]{2} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \cdot 1\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \cdot 1\right) \right]$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12} \qquad \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$$

$$= \sqrt[6]{2} \left[\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) \right]$$

$$w_2 = \sqrt[6]{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right) \right]$$

Možemo ih prikazati na kompleksnoj ravni $\sqrt[6]{2} = |w|$



Rešenja su uvek' jednakostraničnog trougla! Općenito, za n rešenja, rešenja su uvek' pravilnog n -kocka u kompleksnoj ravni.