

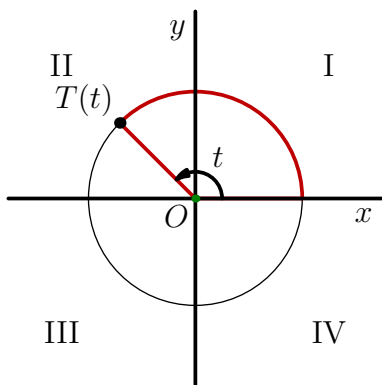
# Trigonometrijske funkcije

September 5, 2008

## 1 Brojeva kružnica

### 1.1 Mjerenje kuteva

- pretpostavimo da se po kružnici jediničnog radijusa pomaknemo za kut  $t$  u smjeru suprotnom od kazaljke na satu



Slika 1: Definicija kuta pomoću jedinične kružnice

- kut  $t$  u radijanima po definiciji je jednak duljini prijedenaog luka
- ravninu dijelimo na četiri kvadranta
  - prvi kvadrant:  $0 \leq x \leq \pi/2$
  - drugi kvadrant:  $\pi/2 \leq x \leq \pi$
  - treći kvadrant:  $\pi \leq x \leq 3\pi/2$
  - četvrti kvadrant:  $3\pi/2 \leq x \leq 2\pi$

- ako obiđemo cijelu kružnicu, duljina prijeđenog luka iznosi  $2\pi$  (opseg jedinične kružnice)
- stoga je kut  $t + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ekvivalentan kutu  $t$  tj. točke  $T(t)$  i  $T(t + 2k\pi)$  se poklapaju
- osim u radijanima, kuteve možemo mjeriti i u stupnjevima
- u tom slučaju krug dijelimo na 360 jednakih dijelova
- svaki dio odgovara kutu od  $1^\circ$
- puni krug odgovara kutu od  $360^\circ$
- kut izražen u radijanima pretvaramo u stupnjeve po formuli

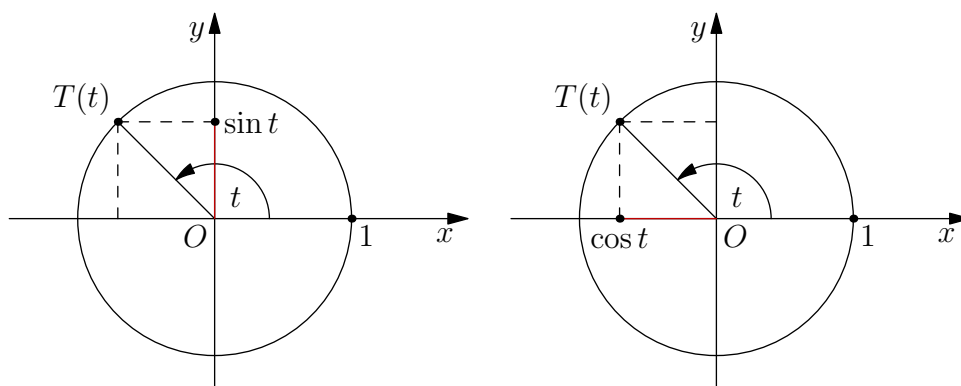
$$t \text{ (stupnjevi)} = \frac{360}{2\pi} \cdot t \text{ (radijani)} \quad (1)$$

|                             |   |            |            |            |            |             |             |             |
|-----------------------------|---|------------|------------|------------|------------|-------------|-------------|-------------|
| $t \text{ (rad)}$           | 0 | $\pi/6$    | $\pi/4$    | $\pi/3$    | $\pi/2$    | $\pi$       | $3\pi/2$    | $2\pi$      |
| $t \text{ (}^\circ\text{)}$ | 0 | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ | $180^\circ$ | $270^\circ$ | $360^\circ$ |

## 2 Funkcije sinus i kosinus

### 2.1 Definicija i osnovna svojstva

- funkcije sinus i kosinus definiramo na brojevnoj kružnici
- funkcija sinus je ordinata, a funkcija kosinus apscisa točke  $T(t)$  na brojevnoj kružnici



Slika 2: Definicije funkcija sinus i kosinus na brojevnoj kružnici

- apsolutna vrijednost obje funkcije mora biti manja od radijusa jedinične kružnice pa dolazimo do prvog važnog svojstva funkcija sinus i kosinus

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \text{i} \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \quad (2)$$

- koordinate točke  $T(t)$ :  $(T_x, T_y) = (\cos t, \sin t)$
- točka  $T(t) \equiv (\cos t, \sin t)$  pripada jediničnoj kružnici samo ako vrijedi (Pitagorin poučak)

$$T_x^2 + T_y^2 = 1 \quad (3)$$

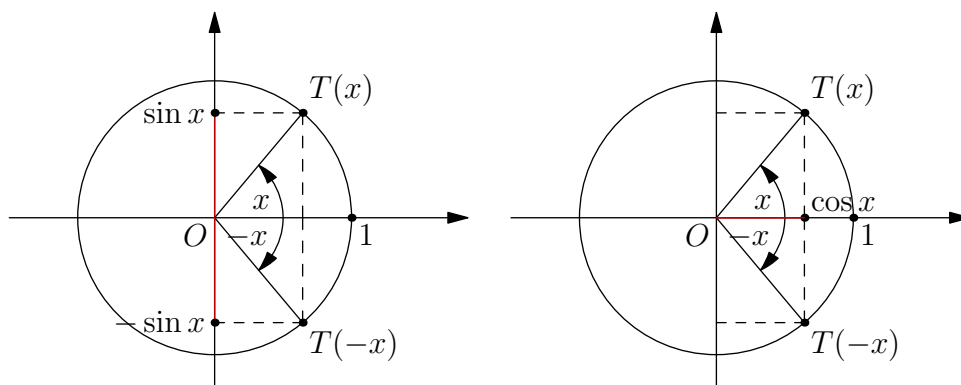
- drugo važno svojstvo funkcija sinus i kosinus

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \quad (4)$$

- točki  $T(t)$  na brojevnoj kružnici pridruženi su svi realni brojevi  $t + 2k\pi$ , gdje je  $k$  cijeli broj
- sve točke  $T(t + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  se poklapaju pa vrijedi

$$\begin{aligned} \cos(t + 2k\pi) &= \cos t \\ \sin(t + 2k\pi) &= \sin t \end{aligned}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

- funkcije sinus i kosinus su periodične s periodom  $2\pi$
- prema konvenciji, kut  $t$  je pozitivan ako brojevnu kružnicu obilazimo u smjeru suprotnom od kazaljke na satu i negativan ako brojevnu kružnicu obilazimo u smjeru kazaljke na satu



Slika 3: Parnost funkcija sinus i kosinus

- sa slike vidimo da vrijedi

$$\sin(-t) = -\sin t \quad \text{i} \quad \cos(-t) = \cos t \quad (6)$$

- funkcija sinus je neparna, dok je funkcija kosinus parna
- funkcija sinus iščezava u točkama

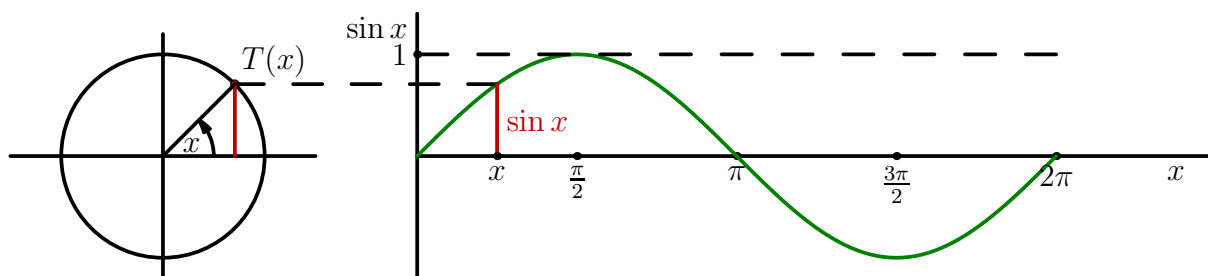
$$x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (7)$$

- funkcija kosinus iščezava u točkama

$$x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (8)$$

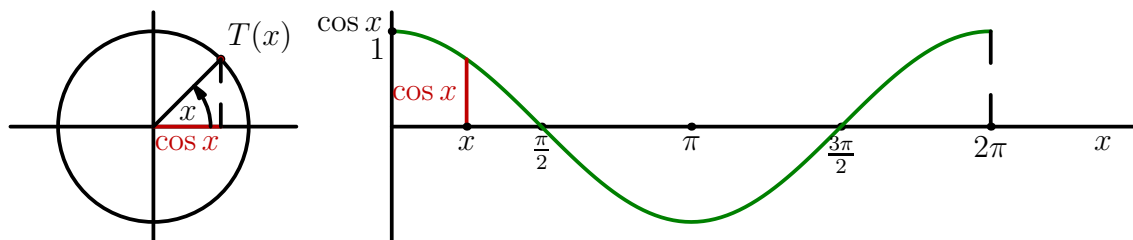
## 2.2 Grafički prikaz funkcija sinus i kosinus

- graf funkcije sinus konstruiramo pomoću brojevnice kružnice
- na os  $x$  nanesimo kut u radijanima, dok na os  $y$  prenesemo ordinatu točke  $T(x)$
- postupak ponavljamo dok ne obiđemo cijelu kružnicu



Slika 4: Konstrukcija grafa funkcije sinus

- period funkcije sinus iznosi  $2\pi$  pa je dovoljno konstruirati graf na intervalu  $[0, 2\pi]$
- na sličan način konstruiramo graf funkcije kosinus
- na os  $x$  nanesimo kut u radijanima, dok na os  $y$  prenesemo apscisu točke  $T(x)$



Slika 5: Konstrukcija grafa funkcije kosinus

- neke karakteristične vrijednosti funkcija sinus i kosinus

| $\phi$      | 0 | $\pi/6$      | $\pi/4$      | $\pi/3$      | $\pi/2$ | $\pi$ | $3\pi/2$ | $2\pi$ |
|-------------|---|--------------|--------------|--------------|---------|-------|----------|--------|
| $\sin \phi$ | 0 | $1/2$        | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1       | 0     | -1       | 0      |
| $\cos \phi$ | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$        | 0       | -1    | 0        | 1      |

Tablica 1: Karakteristične vrijednosti funkcija sinus i kosinus

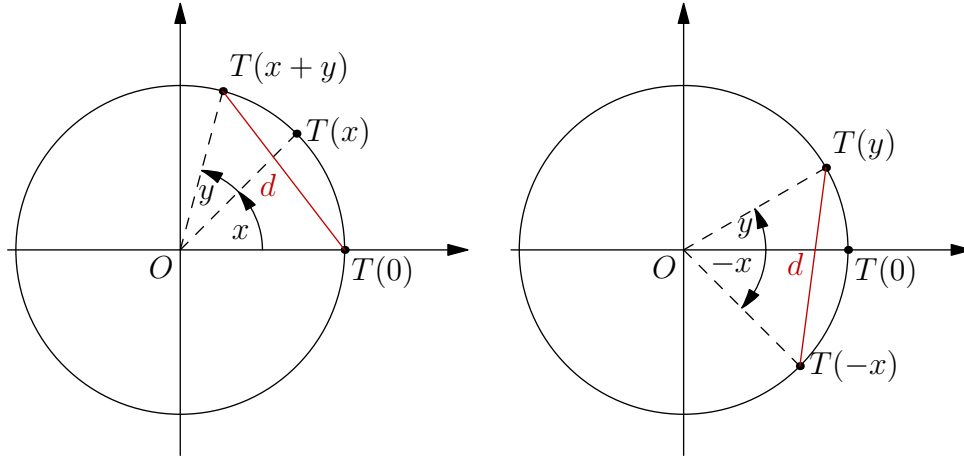
## 2.3 Adicione formule

- u primjenama trigonometrije često moramo izračunati vrijednost trigonometrijske funkcije za zbroj ili razliku dva kuta
- tada koristimo adicione formule

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad (9)$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad (10)$$

- formulu (9) možemo izvesti promatrajući slike



Slika 6: Izvod adicijskih formula

- na lijevoj slici smo označili tri točke:

- $T(x+y) = (\cos(x+y), \sin(x+y))$
- $T(x) = (\cos(x), \sin(x))$
- $T(0) = (1, 0)$

- udaljenost između točaka  $T(x+y)$  i  $T(0)$  iznosi

$$\begin{aligned} d^2 &= (\cos(x+y) - 1)^2 + (\sin(x+y) - 0)^2 \\ &= \cos^2(x+y) - 2\cos(x+y) + 1 + \sin^2(x+y) \\ &= \cos^2(x+y) + \sin^2(x+y) + 1 - 2\cos(x+y) \end{aligned}$$

- iskoristimo relaciju  $\cos^2(x+y) + \sin^2(x+y) = 1$

$$d^2 = 2 - 2\cos(x+y) \quad (11)$$

- sada zarotiramo sve tri točke za kut  $x$  u smjeru kazaljke na satu (desna slika)

- udaljenost  $d$  između točaka  $T(y)$  i  $T(-x)$  ostaje nepromijenjena

$$\begin{aligned} d^2 &= (\cos y - \cos(-x))^2 + (\sin y - \sin(-x))^2 \\ &= (\cos y - \cos x)^2 + (\sin y + \sin x)^2 \\ &= \cos^2 y - 2\cos y \cos x + \cos^2 x + \sin^2 y + 2\sin y \sin x + \sin^2 x \\ &= \cos^2 y + \sin^2 y + \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \sin y - 2\cos x \cos y \\ &= 2 + 2(\sin x \sin y - \cos x \cos y) \end{aligned} \quad (12)$$

- usporedbom izraza (11) i (12) dolazimo do zaključka

$$2 - 2 \cos(x + y) = 2 + 2(\sin x \sin y - \cos x \cos y) \quad (13)$$

- adicione formula za funkciju kosinus

$$\implies \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad (14)$$

- odmah možemo izvesti formulu za kosinus razlike kuteva

$$\begin{aligned} \cos(x - y) &= \cos(x + (-y)) \\ &= \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) \\ &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{aligned} \quad (15)$$

- primjenom adicione formule na slučaj  $x = \pi/2$  možemo doći do veze između funkcija sinus i kosinus

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos y + \sin \frac{\pi}{2} \sin y \quad (16)$$

- iskoristimo poznate vrijednosti funkcija sinus i kosinus

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{i} \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad (17)$$

$$\implies \sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \quad (18)$$

- ako napravimo supstituciju  $x = \pi/2 - y$  dolazimo do formule

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad (19)$$

- došli smo do veze između funkcija sinus i kosinus

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{i} \quad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad (20)$$

- sada možemo izvesti i adicione formule za funkciju sinus

- sinus razlike kuteva

$$\begin{aligned} \sin(x - y) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (x - y)\right] \\ &= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + y\right] \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos y - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin y \\ &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \end{aligned} \quad (21)$$

- sinus zbroja kuteva

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin[x - (-y)] \\ &= \sin x \cos y - \cos x \sin(-y) \\ &= \sin x \cos y + \cos x \sin y\end{aligned}\tag{22}$$

- iz adicijinih formula možemo izvesti i formule za zbroj i razliku funkcija sinus i kosinus
- polazimo od adicijinih formula

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y\tag{23}$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y\tag{24}$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y\tag{25}$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y\tag{26}$$

- zbrojimo formule (23) i (24)

$$2 \cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)\tag{27}$$

- napravimo supstitucije

$$x+y=u \quad \text{i} \quad x-y=v \implies x = \frac{u+v}{2} \quad \text{i} \quad y = \frac{u-v}{2}\tag{28}$$

- slijedi formula za zbroj dva kosinusa

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}\tag{29}$$

- zbrojimo formule (25) i (26)

$$2 \sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)\tag{30}$$

- napravimo supstitucije (28)

- slijedi formula za zbroj dva sinusa

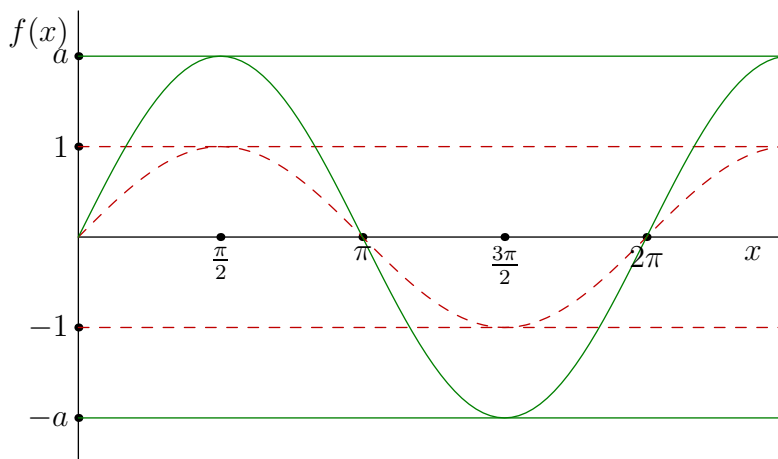
$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}\tag{31}$$

-

## 2.4 Općeniti oblik funkcije sinus

Funkcija oblika:  $f(x) = a \sin x$

- funkcija sinus poprima vrijednosti između  $-1$  i  $1$
- stoga funkcija  $f(x)$  poprima vrijednosti između  $-a$  i  $a$
- broj  $a$  zovemo amplituda



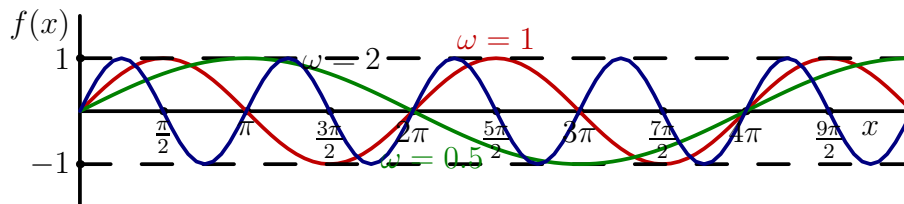
Slika 7: Graf funkcije  $a \sin x$ .

Funkcija oblika:  $f(x) = \sin(\omega x)$

- period funkcije  $\sin x$  iznosi  $2\pi$
- možemo izračunati period funkcije  $f(x)$

$$\omega\tau = 2\pi \implies \tau = \frac{2\pi}{\omega} \quad (32)$$

- ako je  $\omega > 1$  period se skraćuje u odnosu na funkciju  $\sin x$ , a ako je  $\omega < 1$  period se produžuje



Slika 8: Funkcije sinus s različitim periodima.

Funkcija oblika:  $f(x) = \sin(x + \phi)$

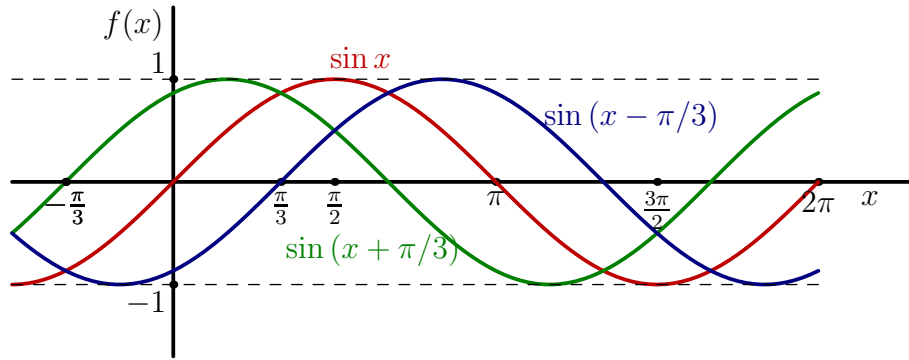
- nultočke funkcije  $\sin x$

$$x_0 = (2k + 1) \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (33)$$

- nultočke funkcije  $\sin(x + \phi)$

$$x_0 + \phi = (2k + 1) \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \implies x_0 = (2k + 1) \frac{\pi}{2} - \phi \quad (34)$$

- graf funkcije  $\sin(x + \phi)$  dobije se translacijom grafa funkcije  $\sin x$  duž osi  $x$  za  $\phi$



Slika 9: Funkcije sinus s različitim početnim fazama  $\phi$ .

### 3 Funkcije tangens i kotangens

- funkciju tangens definiramo kao omjer funkcija sinus i kosinus

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad (35)$$

- tangens nije definiran u nul-točkama funkcije kosinus

$$x_0 = (2k + 1) \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (36)$$

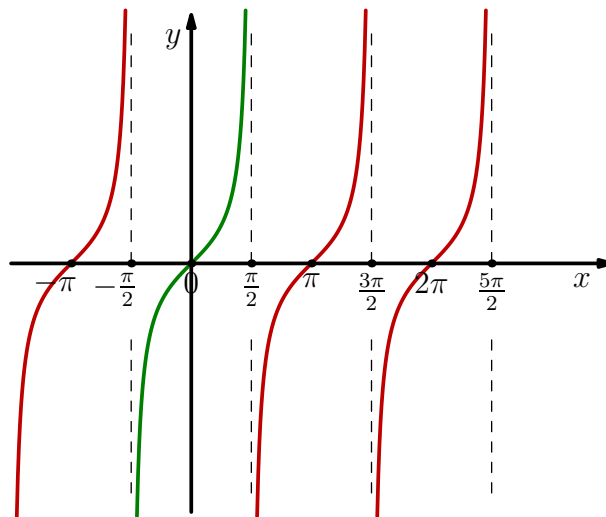
- tangens je periodička funkcija s periodom  $\pi$

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x \quad (37)$$

- tangens je neparna funkcija

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x \quad (38)$$

- graf funkcije tangens



Slika 10: Graf funkcije tangens.

- funkciju kotangens definiramo kao omjer funkcija kosinus i sinus

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (39)$$

- kotangens nije definiran u nul-točkama funkcije sinus

$$x_0 = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (40)$$

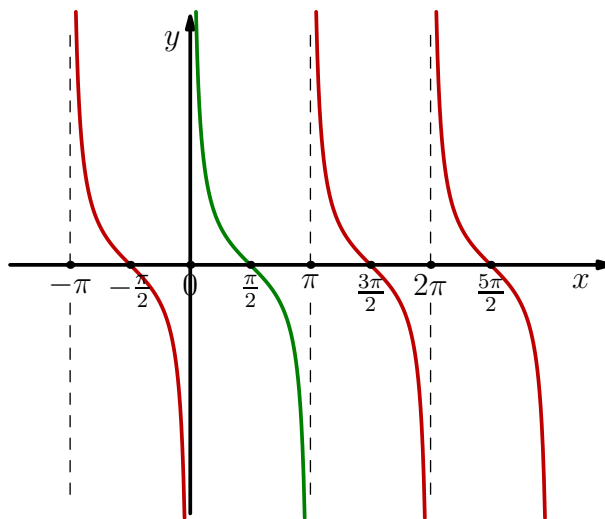
- kotangens je periodička funkcija s periodom  $\pi$

$$\cot(x + \pi) = \frac{\cos(x + \pi)}{\sin(x + \pi)} = \frac{-\cos x}{-\sin x} = \cot x \quad (41)$$

- kotangens je neparna funkcija

$$\cot(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\cot x \quad (42)$$

- graf funkcije kotangens



Slika 11: Graf funkcije kotangens.

## 4 Harmonijska gibanja

- harmonijska gibanja možemo opisati funkcijama oblika

$$f(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (43)$$

- pritom koristimo sljedeće pojmove

- amplituda:  $A$
- kružna frekvencija:  $\omega$
- početna faza:  $\phi$

- period gibanja dan je s

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \quad (44)$$

- superpozicija harmonijskih gibanja iste kružne frekvencije  $\omega$  ponovno je harmonijsko gibanje kružne frekvencije  $\omega$

$$\begin{aligned} f(t) &= A_1 \sin(\omega t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega t + \phi_2) \\ &= A_1 \sin \omega t \cos \phi_1 + A_1 \cos \omega t \sin \phi_1 + A_2 \sin \omega t \cos \phi_2 + A_2 \cos \omega t \sin \phi_2 \\ &= (A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2) \sin \omega t + (A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2) \cos \omega t \end{aligned}$$

- koristimo oznake

$$B_1 \equiv A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2 \quad \text{i} \quad B_2 \equiv A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2 \quad (45)$$

$$\implies f(t) = B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t \quad (46)$$

- ako je bar jedan od brojeva  $B_1$  i  $B_2$  različit od nule možemo naći realne brojeve  $A$  i  $\phi$  sa svojstvom

$$B_1 = A \sin \phi \quad \text{i} \quad B_2 = A \cos \phi \quad (47)$$

- funkcija  $f(t)$  svodi se na

$$f(t) = A \sin \phi \cos \omega t + A \cos \phi \sin \omega t = A \sin (\omega t + \phi) \quad (48)$$

Primjer:

- prikažite u obliku  $A \sin (\omega t + \phi)$  sumu funkcija

$$f(t) = 5 \sin (3t + \pi/6) + 3 \sin (3t - \pi/3) \quad (49)$$

- prvo iskoristimo adicione formule

$$\begin{aligned} \sin (3t + \pi/6) &= \sin 3t \cos (\pi/6) + \cos 3t \sin (\pi/6) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3t + \frac{1}{2} \cos 3t \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \sin (3t - \pi/3) &= \sin 3t \cos (\pi/3) - \cos 3t \sin (\pi/3) \\ &= \frac{1}{2} \sin 3t - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 3t \end{aligned} \quad (51)$$

- sada računamo zbroj (49)

$$\begin{aligned} f(t) &= 5 \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3t + \frac{5}{2} \cos 3t + \frac{3}{2} \sin 3t - 3 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 3t \\ &= \frac{1}{2} (5\sqrt{3} + 3) \sin 3t + \frac{1}{2} (5 - 3\sqrt{3}) \cos 3t \end{aligned} \quad (52)$$

- tražimo amplitudu  $A$  i fazu  $\phi$  tako da vrijedi

$$f(t) = A \sin (3t + \phi) = A \sin 3t \cos \phi + A \cos 3t \sin \phi \quad (53)$$

- usporedba s izrazom (52)

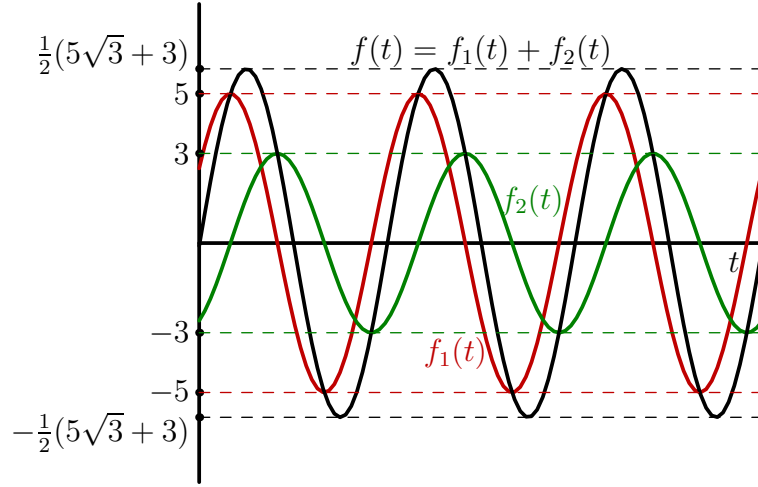
$$A \cos \phi = \frac{1}{2} (5\sqrt{3} + 3) \quad \text{i} \quad A \sin \phi = \frac{1}{2} (5 - 3\sqrt{3}) \quad (54)$$

- podijelimo  $A \sin \phi$  s  $A \cos \phi$

$$\Rightarrow \tan \phi = \frac{5 - 3\sqrt{3}}{5\sqrt{3} + 3} = 0.016822 \Rightarrow \cos \phi \approx 1 \quad (55)$$

- amplituda

$$A = \frac{1}{2} (5\sqrt{3} + 3) \quad (56)$$



Slika 12: Zbroj funkcija  $f_1(t) = 5 \sin(3t + \pi/6)$  i  $f_2(t) = 3 \sin(3t - \pi/3)$ .

- često susrećemo i superpoziciju harmonijskih funkcija različitih frekvencija
- promotrimo najjednostavniji primjer superpozicije dva titranja jednakih amplituda i početnih faza  $\phi_1 = \phi_2 = 0$

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = A \sin \omega_1 t + A \sin \omega_2 t \quad (57)$$

- iskoristimo formulu za zbroj sinusa (31)

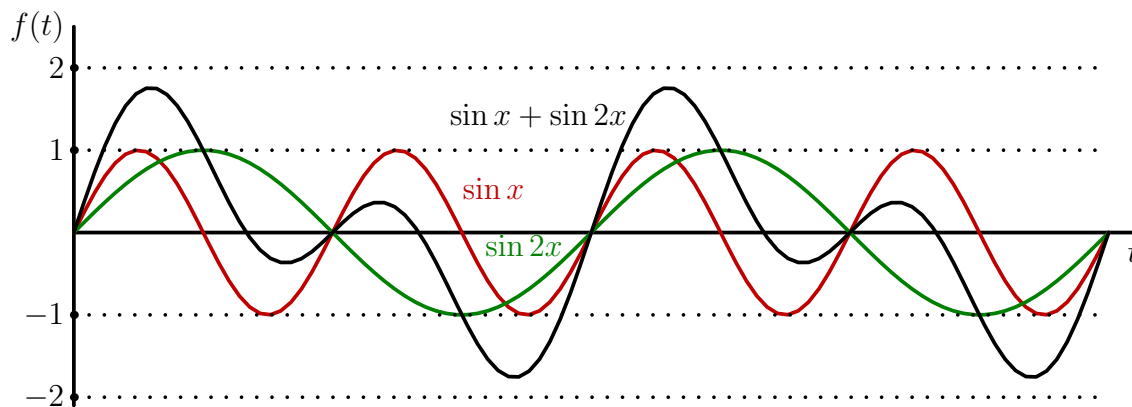
$$f(t) = 2A \sin \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \cos \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \quad (58)$$

Primjer: superpozicija funkcija  $\sin x$  i  $\sin 2x$

- primjenimo formulu za zbroj sinusa (31)

$$\sin 2x + \sin x = 2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (59)$$

- dobivena funkcija ima period  $2\pi$

Slika 13: Zbroj funkcija  $f(t) = \sin t + 2 \sin 2t$ 

Primjer: udari

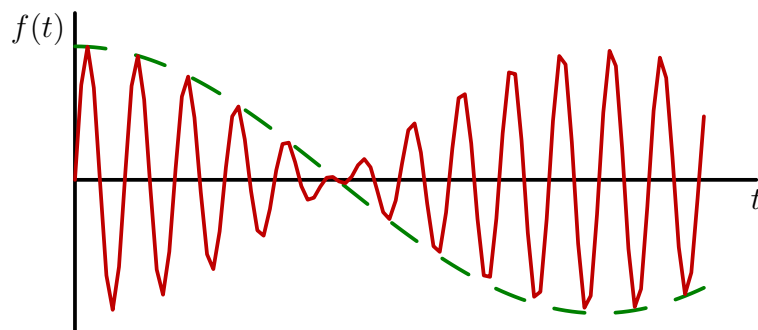
- posebno je zanimljiv primjer kada su frekvencije  $\omega_1$  i  $\omega_2$  približno jednake

$$\omega_1 \approx \omega_2 \implies \omega_1 \equiv \omega \quad \text{i} \quad \omega_2 \equiv \omega + \epsilon \quad (60)$$

- superpozicija takve dvije funkcije

$$f(t) = 2A \sin(\omega t) \cos\left(\frac{\epsilon}{2}t\right) \quad (61)$$

- radi se o titranju frekvencije  $\omega$  čija se amplituda sporo mijenja
- promjenu (modulaciju) amplitude daje faktor  $\cos\left(\frac{\epsilon}{2}t\right)$
- superpoziciju titranja bliskih frekvencija zovemo udari
- na slici je superpozicija dva sinusa bliskih frkvencija (crvena linija) i linija koja prikazuje promjenu amplitude (zelena linija)



Slika 14: Grafički prikaz udara.

## 5 Ciklometrijske funkcije

- ciklometrijske funkcije su inverzne funkcije trigonometrijskih funkcija

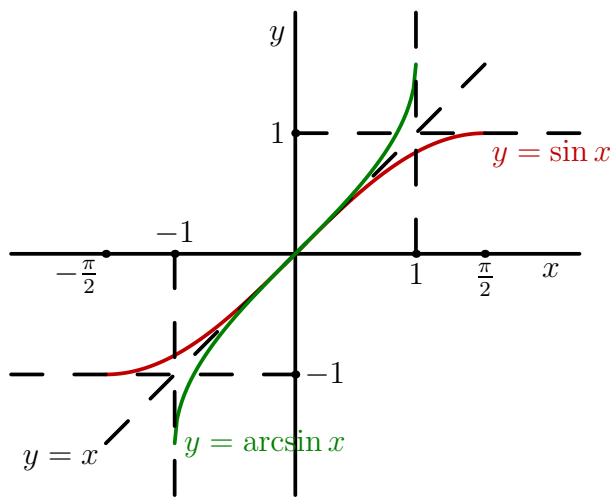
### 5.1 Funkcija $\arcsin(x)$

- funkcija  $\sin x$  preslikava interval  $[-\pi/2, \pi/2]$  na interval  $[-1, 1]$
- definiramo inverznu funkciju  $\arcsin x$  za koju vrijedi

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \forall x \in [-\pi/2, \pi/2] \quad (62)$$

$$\sin(\arcsin x) = x \quad \forall x \in [-1, 1] \quad (63)$$

- bitno je uočiti da je funkcija  $\sin x$  definirana za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , dok je funkcija  $\arcsin x$  definirana samo na intervalu  $[-1, 1]$  jer  $\sin x$  poprima vrijednosti samo u tom intervalu
- graf funkcije  $\arcsin$  dobijemo zrcaljenjem grafa funkcije  $\sin$  s obzirom na pravac  $y = x$



Slika 15: Graf funkcije arcsin.

|             |   |         |              |              |         |
|-------------|---|---------|--------------|--------------|---------|
| $x$         | 0 | $\pi/6$ | $\pi/4$      | $\pi/3$      | $\pi/2$ |
| $\sin x$    | 0 | $1/2$   | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1       |
| $\arcsin x$ | 0 | $\pi/6$ | $\pi/4$      | $\pi/3$      | $\pi/2$ |

Tablica 2: Nekoliko vrijednosti funkcija sinus i arcsin

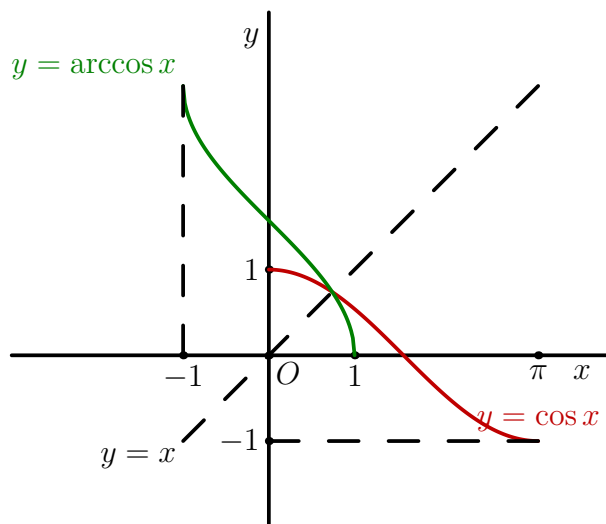
## 5.2 Funkcija arccos(x)

- funkcija  $\cos x$  također preslikava interval  $[-\pi/2, \pi/2]$  na interval  $[-1, 1]$
- opet definiramo inverznu funkciju  $\arccos x$  za koju vrijedi

$$\arccos(\cos x) = x \quad \forall x \in [-\pi/2, \pi/2] \quad (64)$$

$$\cos(\arccos x) = x \quad \forall x \in [-1, 1] \quad (65)$$

- kao i u prethodnom slučaju, funkcija  $\cos x$  definirana je za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , dok je funkcija  $\arccos x$  definirana samo na intervalu  $[-1, 1]$
- graf funkcije  $\arccos$  dobijemo zrcaljenjem grafa funkcije  $\cos$  s obzirom na pravac  $y = x$



Slika 16: Graf funkcije arccos.

|             |   |              |              |         |         |
|-------------|---|--------------|--------------|---------|---------|
| $x$         | 0 | $\pi/6$      | $\pi/4$      | $\pi/3$ | $\pi/2$ |
| $\cos x$    | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$   | 0       |
| $\arccos x$ | 0 | $\pi/6$      | $\pi/4$      | $\pi/3$ | $\pi/2$ |

Tablica 3: Nekoliko vrijednosti funkcija cos i arccos

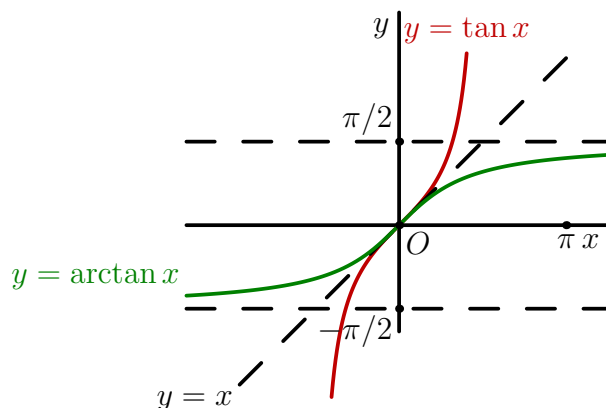
### 5.3 Funkcija arctan(x)

- funkcija  $\tan x$  preslikava interval  $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$  na interval  $\langle -\infty, \infty \rangle$
- definiramo inverznu funkciju  $\arctan x$  za koju vrijedi

$$\arctan(\tan x) = x \quad \forall x \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle \quad (66)$$

$$\tan(\arctan x) = x \quad \forall x \in \langle -\infty, \infty \rangle \quad (67)$$

- za razliku od funkcija  $\cos x$  i  $\sin x$  funkcija  $\tan x$  nije ograničena pa je funkcija  $\arctan x$  definirana na cijelom skupu realnih brojeva
- graf funkcije  $\arctan$  dobijemo zrcaljenjem grafa funkcije  $\tan$  s obzirom na pravac  $y = x$



Slika 17: Graf funkcije arctan.

- na isti način bi definirali i funkciju arccot

## 6 Zadaci za vježbu

### Zadatak 1

Dokažite sljedeće relacije

$$(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x) = \cos 2x$$

$$(\sin 2x - \cos 3x) \cos 5x = \frac{1}{2} (\sin 7x - \sin 3x - \cos 2x - \cos 8x)$$

$$(\sin x + \cos x)(\sin 2x + \cos 2x) = \sin 3x + \cos x$$

### Zadatak 2

Dokažite da za  $x \in [0, \pi/2]$  vrijede sljedeće relacije

$$\sin x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}} \quad \text{i} \quad \cos x = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}$$

### Zadatak 3

Dokažite da za  $x \notin \{\pi/2 + m\pi, m \in \mathbb{Z}\}$  vrijedi sljedeća relacija

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

# Kompleksni brojevi

September 5, 2008

## 1 Kompleksna ravnina

### 1.1 Pojam kompleksnog broja

- rješenja kvadratne jednadžbe

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

možemo napisati u obliku

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2)$$

- ako za parametre kvadratne jednadžbe vrijedi

$$b^2 - 4ac < 0 \quad (3)$$

rješenja se ne nalaze u skupu realnih brojeva

Primjer:

$$x^2 + 1 = 0 \implies x^2 = -1 \implies x_{1,2} = \pm\sqrt{-1} \quad (4)$$

Primjer:

$$x^2 + 4x + 7 = 0 \implies x_{1,2} = -\frac{4}{2} \pm \frac{\sqrt{16 - 28}}{2} = -2 \pm \sqrt{-3} \quad (5)$$

- kvadriranjem realnog broja nikako ne možemo dobiti negativne brojeve
- da bi obuhvatili sva rješenja kvadratne jednadžbe moramo proširiti skup realnih brojeva

- definiramo imaginarnu jedinicu

$$i^2 = -1 \quad (6)$$

- rješenje iz prvog primjera je imaginarni broj

$$x_{1,2} = \pm i \quad (7)$$

- rješenje iz drugog primjera je kompleksni broj jer ima realni i imaginarni dio

$$x_{1,2} = -2 \pm i\sqrt{3} \quad (8)$$

- iz definicije imaginarne jedinice slijedi

$$i^3 = i \cdot i^2 = -i \quad (9)$$

$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1 \quad (10)$$

- standardni oblik kompleksnog broja

$$z = x + yi \quad \text{gdje su } x, y \in \mathcal{R} \quad (11)$$

- broj  $x$  zovemo realni dio kompleksnog broja  $z$

$$x = \operatorname{Re} z \quad (12)$$

- broj  $y$  zovemo imaginarni dio kompleksnog broja  $z$

$$y = \operatorname{Im} z \quad (13)$$

- dva kompleksna broja

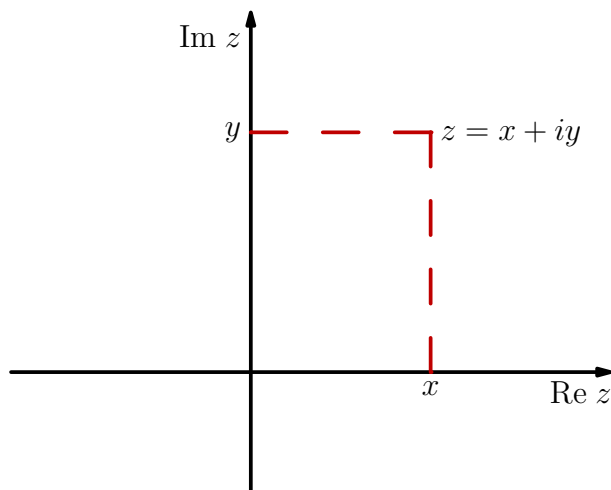
$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{i} \quad z_2 = x_2 + iy_2 \quad (14)$$

su jednaka ako su im realni i imaginarni dijelovi jednaki

$$x_1 = x_2 \quad \text{i} \quad y_1 = y_2 \quad (15)$$

- kompleksne brojeve grafički predstavljamo u kompleksnoj ravnini tako da broj  $z = x + yi$  idenitificiramo s točkom  $(x, y)$

- kompleksnu ravninu ponekad zovemo i Gaussova ravnina

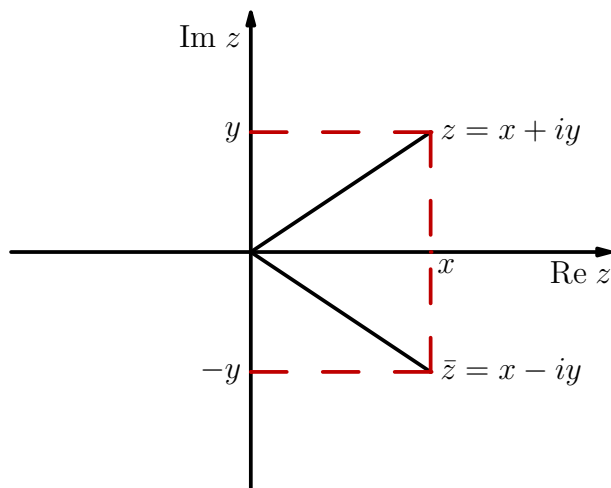


Slika 1: Prikaz kompleksnog broja u Gaussovoj ravnini

## 1.2 Kompleksna konjugacija

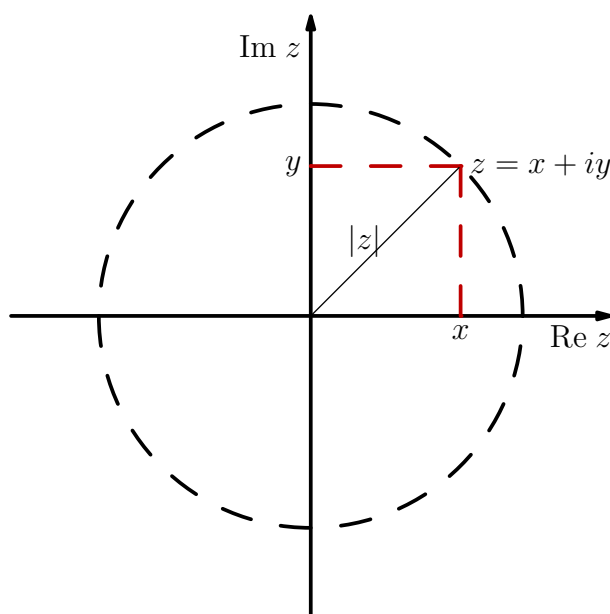
- ako je  $z = x + iy$  kompleksni broj, sa  $\bar{z}$  označavamo njemu konjugirani kompleksni broj

$$\bar{z} = x - iy \quad (16)$$

Slika 2: Kompleksni broj  $z$  i njemu konjugiranju kompleksni broj  $\bar{z}$  u Gaussovoj ravnini

### 1.3 Apsolutna vrijednost kompleksnog broja

- apsolutnu vrijednost ili modul kompleksnog broja definiramo kao udaljenost točke  $z = (x, y)$  od ishodišta kompleksne ravnine



Slika 3: Modul kompleksnog broja  $z = x + iy$ . Na kružnici radijusa  $|z|$  nalaze se svi kompleksni brojevi s modulom  $|z|$ .

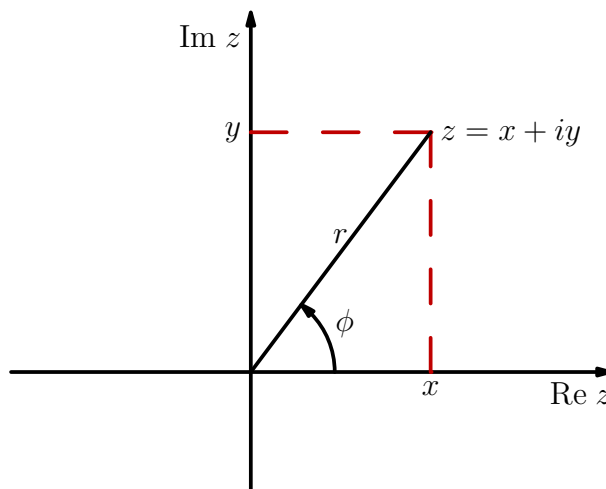
- iz Pitagorinog poučka slijedi

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (17)$$

### 1.4 Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

- neka je  $z = x + iy$  proizvoljni kompleksni broj
- ako modul kompleksnog broja označimo s  $r$ , možemo napisati

$$x = r \cos \phi \quad \text{ i } \quad y = r \sin \phi \quad (18)$$



Slika 4: Veličine potrebne za definiciju trigonometrijskog oblika kompleksnog broja

- kut  $\phi$  možemo izračunati koristeći pravokutni trokut na sl. 4

$$\tan \phi = \frac{y}{x} \quad (19)$$

- svaki kompleksni broj možemo napisati u trigonometrijskom obliku

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi) \quad (20)$$

- kut  $\phi$  obično zovemo argument kompleksnog broja

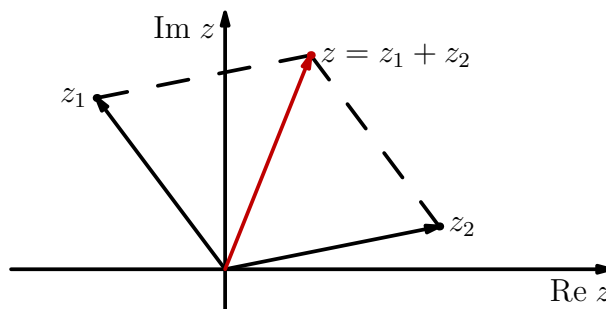
## 2 Osnovne operacije

### 2.1 Zbrajanje kompleksnih brojeva

- kompleksne brojeve  $z_1 = x_1 + iy_1$  i  $z_2 = x_2 + iy_2$  zbrojimo tako da odvojeno zbrojimo realne i imaginarne dijelove

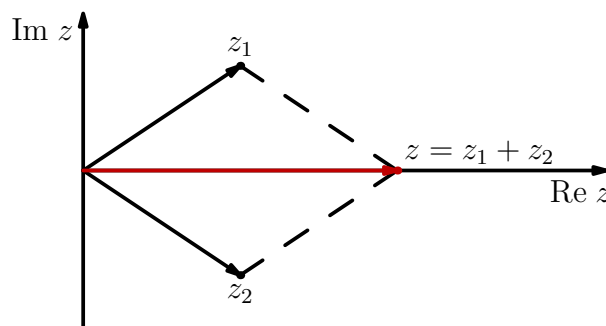
$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (21)$$

- zbrajanje kompleksnih brojeva u Gaussovoj ravnini jednako je zbrajanju vektora

Slika 5: Zbroj kompleksnih brojeva  $z_1$  i  $z_2$  u Gaussovoj ravini

- zbroj kompleksnog broja  $z$  i njemu konjugiranog broja  $\bar{z}$  je realni broj

$$z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x \quad (22)$$

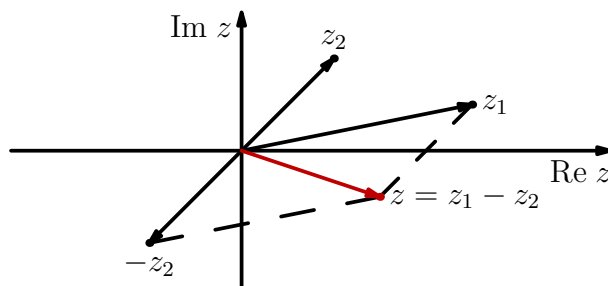
Slika 6: Zbroj kompleksnih brojeva  $z$  i  $\bar{z}$  u Gaussovoj ravini

## 2.2 Oduzimanje kompleksnih brojeva

- kompleksne brojeve  $z_1 = x_1 + iy_1$  i  $z_2 = x_2 + iy_2$  oduzimamo tako da odvojeno oduzimamo realne i imaginarne dijelove

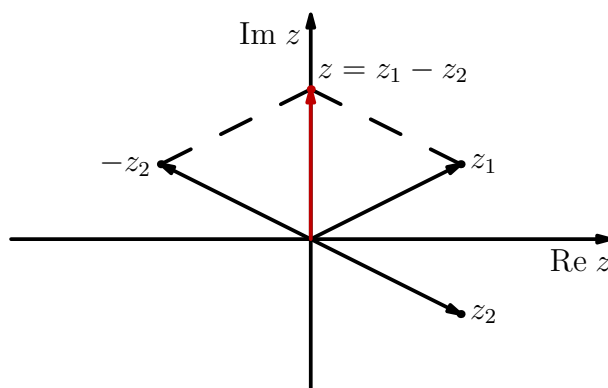
$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i \quad (23)$$

- oduzimanje kompleksnih brojeva u Gaussovoj ravini jednako je oduzimanju vektora

Slika 7: Razlika kompleksnih brojeva  $z_1$  i  $z_2$  u Gaussovoj ravini

- razlika kompleksnog broja  $z$  i njemu konjugiranog broja  $\bar{z}$  je imaginarni broj

$$z - \bar{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy \quad (24)$$

Slika 8: Razlika kompleksnih brojeva  $z$  i  $\bar{z}$  u Gaussovoj ravini

### 2.3 Množenje kompleksnih brojeva

- pri množenju kompleksnih brojeva

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{i} \quad z_2 = x_2 + iy_2 \quad (25)$$

u obzir uzimamo činjenicu  $i^2 = -1$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 \\ z_1 \cdot z_2 &= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned} \quad (26)$$

- umnožak kompleksnog broja  $z$  i njemu konjugiranog broja  $\bar{z}$  jednak je kvadratu modula broja  $z$

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 \quad (27)$$

- množenje kompleksnih brojeva je jednostavnije ako koristimo trigonometrijski oblik

$$z_1 = r_1 \cos \phi_1 + ir_1 \sin \phi_1 \implies x_1 = r_1 \cos \phi_1 \quad \text{i} \quad y_1 = r_1 \sin \phi_1 \quad (28)$$

$$z_2 = r_2 \cos \phi_2 + ir_2 \sin \phi_2 \implies x_2 = r_2 \cos \phi_2 \quad \text{i} \quad y_2 = r_2 \sin \phi_2 \quad (29)$$

- uvrstimo komponente  $x_1, y_1, x_2$  i  $y_2$

$$x_1 x_2 = r_1 r_2 \cos \phi_1 \cos \phi_2 \quad (30)$$

$$y_1 y_2 = r_1 r_2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 \quad (31)$$

$$x_1 y_2 = r_1 r_2 \cos \phi_1 \sin \phi_2 \quad (32)$$

$$y_1 x_2 = r_1 r_2 \sin \phi_1 \cos \phi_2 \quad (33)$$

- realni dio produkta brojeva  $z_1$  i  $z_2$

$$x_1 x_2 - y_1 y_2 = r_1 r_2 (\cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2) = r_1 r_2 \cos (\phi_1 + \phi_2) \quad (34)$$

- imaginarni dio produkta brojeva  $z_1$  i  $z_2$

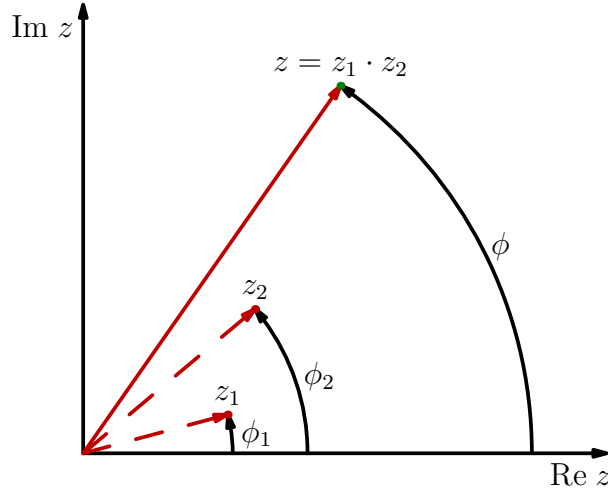
$$x_1 y_2 + x_2 y_1 = r_1 r_2 (\sin \phi_2 \cos \phi_1 + \cos \phi_2 \sin \phi_1) = r_1 r_2 \sin (\phi_1 + \phi_2) \quad (35)$$

- ukupni produkt brojeva  $z_1$  i  $z_2$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos (\phi_1 + \phi_2) + i \sin (\phi_1 + \phi_2)] \quad (36)$$

je kompleksni broj  $z$  s modulom  $|z| = r_1 r_2 \equiv r$  i argumentom  $\phi_1 + \phi_2 \equiv \phi$

$$z_1 \cdot z_2 = r (\cos \phi + i \sin \phi) \quad (37)$$



Slika 9: Množenje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku

## 2.4 Potenciranje kompleksnih brojeva

- promotrimo prvo kvadrat kompleksnog broja  $z$

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi) \implies z^2 = z \cdot z = r^2 (\cos (2\phi) + i \sin (2\phi)), \quad (38)$$

a zatim i treću potenciju istog broja

$$\begin{aligned} z^3 &= z^2 \cdot z = r^2 \cdot r (\cos (2\phi + \phi) + i \sin (2\phi + \phi)) \\ z^3 &= r^3 (\cos (3\phi) + i \sin (3\phi)) \end{aligned} \quad (39)$$

- pri svakom sljedećem potenciranju bi modul još jednom pomnožili s  $r$ , a argumentu bi dodali još jedan kut  $\phi$
- $n$ -ta potencija broja  $z$

$$z^n = r^n [\cos (n\phi) + i \sin (n\phi)] \quad (40)$$

- ako primjenimo prethodnu formulu na kompleksni broj s jediničnim modulom dolazimo do *de Moivre*-ovih formula
- prva *de Moivre*-ova formula

$$[\cos (\phi) + i \sin (\phi)]^n = [\cos (n\phi) + i \sin (n\phi)] \quad (41)$$

- druga *de Moivre*-ova formula

$$\begin{aligned} [\cos (\phi) - i \sin (\phi)]^n &= [\cos (\phi) + i \sin (-\phi)]^n \\ &= [\cos (n\phi) + i \sin (-n\phi)] \\ &= [\cos (n\phi) - i \sin (n\phi)] \end{aligned} \quad (42)$$

## 2.5 Dijeljenje kompleksnih brojeva

- kompleksne brojeve

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{i} \quad z_2 = x_2 + iy_2 \quad (43)$$

dijelimo tako da racionaliziramo nazivnik

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 - x_1y_2i + x_2y_1i}{x_2^2 - y_2^2i^2} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i \end{aligned} \quad (44)$$

- kao i u slučaju množenja, dijeljenje kompleksnih brojeva je jednostavnije ako koristimo trigonometrijski oblik

$$z_1 = r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1) \quad \text{i} \quad z_2 = r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2) \quad (45)$$

- uvrstimo komponente  $x_1, y_1, x_2$  i  $y_2$

$$x_1x_2 = r_1r_2 \cos \phi_1 \cos \phi_2 \quad (46)$$

$$y_1y_2 = r_1r_2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 \quad (47)$$

$$x_1y_2 = r_1r_2 \cos \phi_1 \sin \phi_2 \quad (48)$$

$$y_1x_2 = r_1r_2 \sin \phi_1 \cos \phi_2 \quad (49)$$

- nazivnici u formuli (44)

$$x_2^2 + y_2^2 = r_2^2 \quad (50)$$

- brojnik realnog dijela kvocijenta

$$x_1x_2 + y_1y_2 = r_1r_2 (\cos \phi_1 \cos \phi_2 + \sin \phi_1 \sin \phi_2) = r_1r_2 \cos (\phi_1 - \phi_2) \quad (51)$$

- brojnik imaginarnog dijela kvocijenta

$$x_2y_1 - x_1y_2 = r_1r_2 \cos \phi_2 \sin \phi_1 - r_1r_2 \cos \phi_1 \sin \phi_2 = r_1r_2 \sin (\phi_1 - \phi_2) \quad (52)$$

- kvocijent brojeva  $z_1$  i  $z_2$  u trigonometrijskom obliku

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos (\phi_1 - \phi_2) + i \sin (\phi_1 - \phi_2)) \quad (53)$$

- modul broja

$$z = \frac{z_1}{z_2} = r(\cos \phi + i \sin \phi) \quad (54)$$

je kvocijent modula brojeva  $z_1$  i  $z_2$ , a argument broja  $z$  je razlika argumenata brojeva  $z_1$  i  $z_2$

$$r = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{i} \quad \phi = \phi_1 - \phi_2 \quad (55)$$

## 2.6 Korjenovanje kompleksnih brojeva

- želimo izračunati  $n$ -ti korijen kompleksnog broja  $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$

$$z_1 = \sqrt[n]{z} = r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1) \quad (56)$$

- $n$ -ta potencija broja  $z_1$  je upravo broj  $z$

$$z_1^n = r_1^n (\cos(n\phi_1) + i \sin(n\phi_1)) = z = r(\cos \phi + i \sin \phi) \quad (57)$$

- modul  $n$ -tog korijena broja  $z$  je  $n$ -ti korijen modula broja  $z$

$$r_1 = \sqrt[n]{r} \implies |\sqrt[n]{z}| = \sqrt[n]{|z|} \quad (58)$$

- pri određivanju argumenta  $n$ -tog korijena broja  $z$  moramo biti oprezniji
- očito rješenje  $\phi_1 = \phi/n$  je samo jedno od mogućih
- prisjetimo se da argumentu kompleksnog broja  $z$  uvijek možemo dodati višekratnik broja  $2\pi$
- jednačba za argument  $n$ -tog korijena zapravo glasi

$$n\phi_1 = \phi + 2k\pi \implies \phi_1 = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad (59)$$

- još trebamo odrediti mogući raspon brojeva  $k$
- ako vrijedi  $k \geq n$  broju  $\phi_1$  dodajemo višekratnik broja  $2\pi$  tj. ponavljamo jedno od prijašnjih rješenja
- dakle, broj  $k$  se nalazi u intervalu  $0, 1, \dots, n-1$
- takvim izborom našli smo svih  $n$  rješenja jednačbe

$$z_1 = \sqrt[n]{z} \quad (60)$$

Primjer: četvrti korijen broja  $z = r(\cos \phi + i \sin \pi)$

- jednačba

$$z_1 = \sqrt[4]{z} \quad (61)$$

ima četiri rješenja

- modul svakog rješenja jednak je četvrtom korijenu modula broja  $z$

$$|z_1| = \sqrt[4]{|z|} \quad (62)$$

- sva rješenja jednačbe (61)

$$z_{1,1} = \sqrt[4]{|z|} \left( \cos \frac{\phi}{4} + i \sin \frac{\phi}{4} \right) \quad (63)$$

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \sqrt[4]{|z|} \left( \cos \frac{\phi + 2\pi}{4} + i \sin \frac{\phi + 2\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt[4]{|z|} \left( \cos \left( \frac{\phi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\phi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} z_{1,3} &= \sqrt[4]{|z|} \left( \cos \frac{\phi + 4\pi}{4} + i \sin \frac{\phi + 4\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt[4]{|z|} \left( \cos \left( \frac{\phi}{4} + \pi \right) + i \sin \left( \frac{\phi}{4} + \pi \right) \right) \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} z_{1,4} &= \sqrt[4]{|z|} \left( \cos \frac{\phi + 6\pi}{4} + i \sin \frac{\phi + 6\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt[4]{|z|} \left( \cos \left( \frac{\phi}{4} + \frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\phi}{4} + \frac{3\pi}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad (66)$$

- ako bi još jednom povećali  $k$  broju  $\phi/4$  bi dodali  $2\pi$ , a to znači da bi ponovili prvo rješenje

Primjer: šesti korijen broja 1

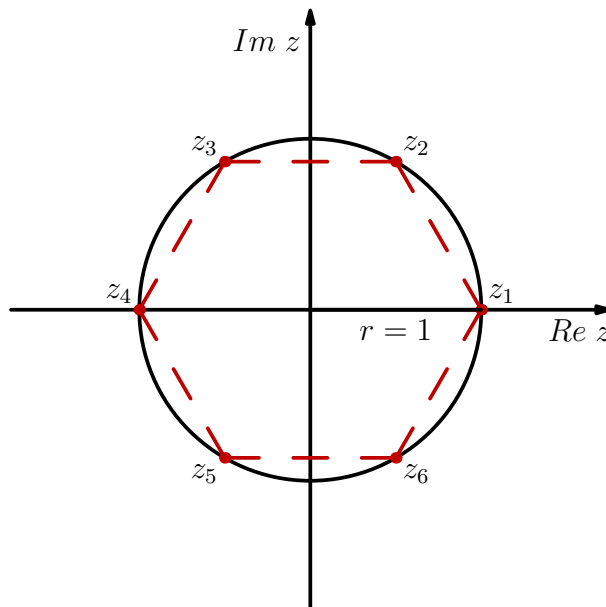
- broj 1 napišemo u obliku

$$\cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi) = e^{2k\pi i} = 1 \quad (67)$$

- šesti korijen broja 1

$$1^{1/6} = e^{k\pi i/3}, \quad k = 0, \dots, 5 \quad (68)$$

- skica korijena u kompleksnoj ravnini



### 3 Eulerova formula

- svakom realnom broju  $t$  možemo pridružiti kompleksni broj

$$z = \cos t + i \sin t \quad (69)$$

- za takav broj koristimo posebnu notaciju

$$e^{it} \equiv \cos t + i \sin t \quad (70)$$

koju zovemo Eulerova formula

- iskoristimo prethodne rezultate za množenje kompleksnih brojeva

$$z_1 = \cos x + i \sin x = e^{ix} \quad \text{ i } \quad z_2 = \cos y + i \sin y = e^{iy} \quad (71)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \cos(x+y) + i \sin(x+y) \implies e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)} \quad (72)$$

- prethodni izraz se lako pamti jer se ekvivalentna formula pojavljuje kod svih eksponencijalnih funkcija

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad (73)$$

- funkcije sinus i kosinus možemo izraziti pomoću eksponencijalne funkcije (70)

$$e^{it} + e^{-it} = \cos t + i \sin t + \cos t + i \sin(-t) = 2 \cos t \quad (74)$$

$$\cos t = \frac{1}{2} [e^{it} + e^{-it}] \quad (75)$$

$$e^{it} - e^{-it} = \cos t + i \sin t - \cos t - i \sin(-t) = 2i \sin t \quad (76)$$

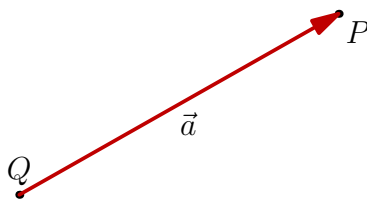
$$\sin t = \frac{1}{2i} [e^{it} - e^{-it}] \quad (77)$$

# Algebra Vektora

## 1 Algebra vektora

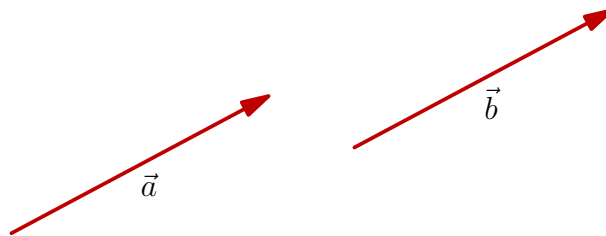
### 1.1 Definicija vektora

- pri rješavanju fizikalnih problema najčešće susrećemo skalarne i vektorske veličine
- za opis skalarne veličine trebamo zadati samo njezin iznos (npr. temperatura, tlak, ...)
- skalarne veličine opisujemo realnim brojevima
- za opis vektorske veličine trebamo zadati njezin iznos i smjer (npr. položaj, brzina, akceleracija, ...)
- vektorske veličine opisujemo usmjerenim dužinama u prostoru

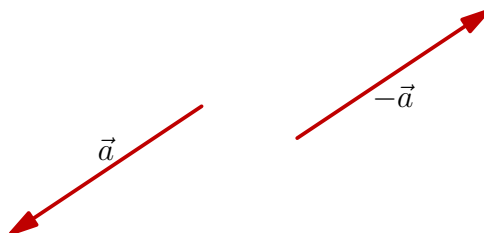


Slika 1: Vektor  $\vec{a}$  s hvatištem u točki  $Q$  i krajem u točki  $P$ .

- vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  su jednaki ako imaju jednaku dužinu i smjer
- pritom nije bitno gdje im se nalazi hvatište tj. početna točka vektora

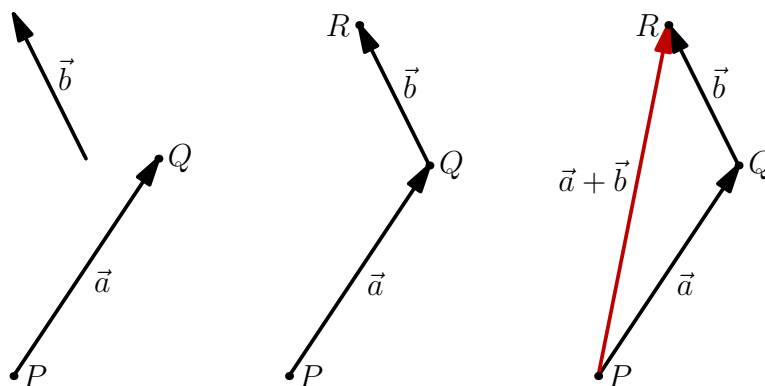
Slika 2: Jednakost vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .

- vektor  $-\vec{a}$  ima jednaku dužinu kao vektor  $\vec{a}$ , ali suprotan smjer

Slika 3: Vektor  $\vec{a}$  i njemu suprotan vektor  $-\vec{a}$ .

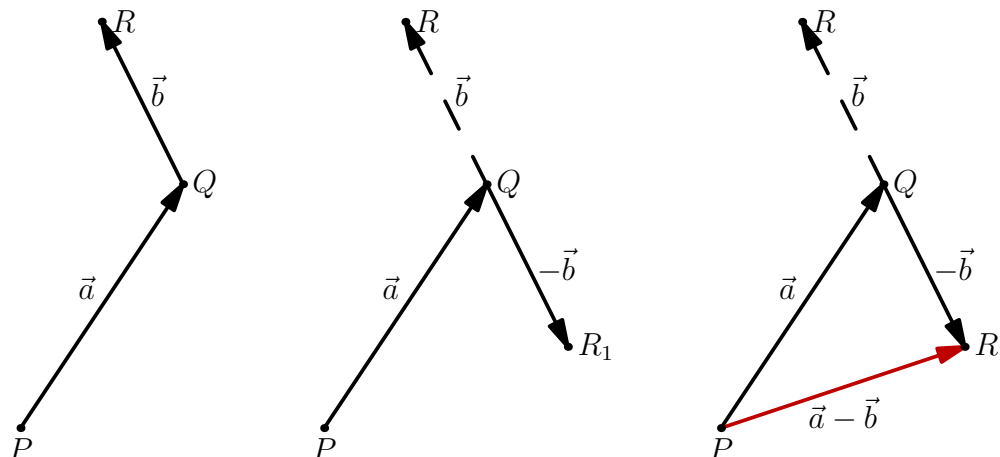
## 1.2 Zbrajanje i oduzimanje vektora

- vektor  $\vec{b}$  transliramo tako da mu se hvatište poklapa s krajem vektora  $\vec{a}$
- hvatište zbroja  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$  poklapa se s hvatištem vektora  $\vec{a}$  (točka  $P$ ), dok mu se kraj poklapa s krajem vektora  $\vec{b}$  (točka  $R$ )

Slika 4: Zbrajanje vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .

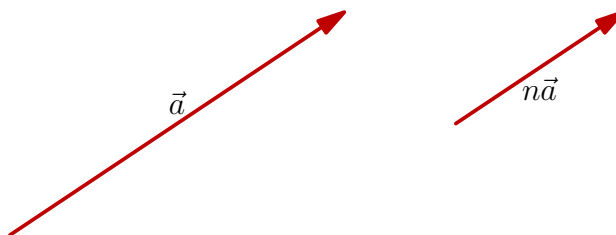
- oduzimanje vektora svodimo na zbrajanje vektora

- vektor  $-\vec{b}$  translaticiramo tako da mu se hvatište poklapa s krajem vektora  $\vec{a}$
- hvatište razlike  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$  poklapa se s hvatištem vektora  $\vec{a}$  (točka  $P$ ), dok mu se kraj poklapa s krajem vektora  $-\vec{b}$  (točka  $R_1$ )

Slika 5: Postupak oduzimanja vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .

### 1.3 Množenje vektora skalarom

- ako je skalar  $n$  pozitivan, vektori  $\vec{b}$  i  $\vec{a}$  imaju jednak smjer, a ako je skalar  $n$  negativan suprotan
- duljina vektora  $\vec{b}$  je u oba slučaja  $|n|$  puta veća od duljine vektora  $\vec{a}$

Slika 6: Množenje vektora  $\vec{a}$  skalarom  $n$ .

- ako vektor  $\vec{a}$  podijelimo s njegovom dužinom ( $|\vec{a}|$ ), kao rezultat ćemo dobiti vektor jedinične dužine
- takav vektor zovemo jedinični vektor

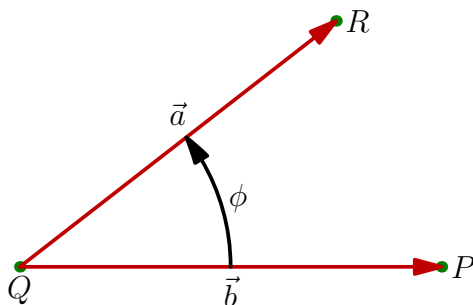
$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad (1)$$

- kod zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom vrijede sljedeća pravila
  - komutativnost zbrajanja:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
  - komutativnost množenja skalarom:  $n\vec{a} = \vec{a}n$
  - distributivnost:  $n(\vec{a} + \vec{b}) = n\vec{a} + n\vec{b}$

## 2 Skalarni produkt vektora

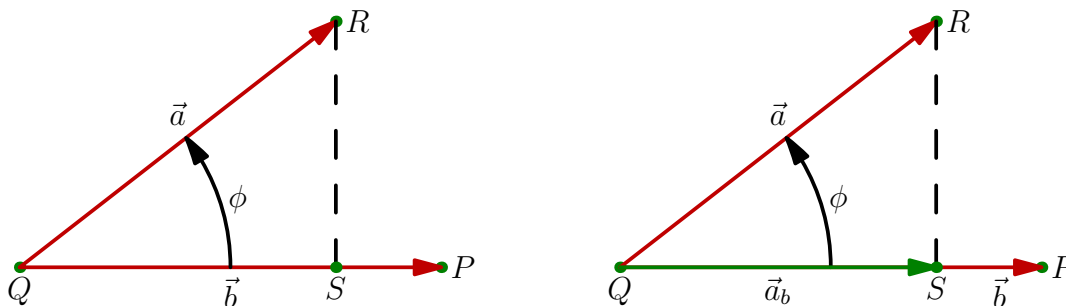
### 2.1 Definicija skalarnog produkta vektora

- prvo uvodimo pojam projekcije vektora  $\vec{a}$  na  $\vec{b}$
- promatramo dva vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  koji zatvaraju kut  $\phi$



Slika 7: Vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  koji zatvaraju kut  $\phi$ .

- povučemo okomicu iz točke  $R$  na vektor  $\vec{b}$
- vektor s hvatištem u točki  $Q$  i krajem u točki  $S$  zovemo projekcija vektora  $\vec{a}$  na vektor  $\vec{b}$  (označimo ga s  $\vec{a}_b$ )



Slika 8: Projekcija vektora  $\vec{a}$  na vektor  $\vec{b}$ .

- iz pravokutnog trokuta na slici slijedi

$$\cos \phi = \frac{|\vec{a}_b|}{|\vec{a}|} \implies |\vec{a}_b| = |\vec{a}| \cos \phi \quad (2)$$

- skalarni produkt vektora definiramo kao produkt duljine projekcije  $\vec{a}_b$  i duljine vektora  $\vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}_b| |\vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \phi \quad (3)$$

- kao oznaku za skalarni produkt obično koristimo  $\cdot$  između vektora
- rezultat skalarnog množenja vektora je skalar
- skalarni produkt vektora je komutativan

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \phi \quad (4)$$

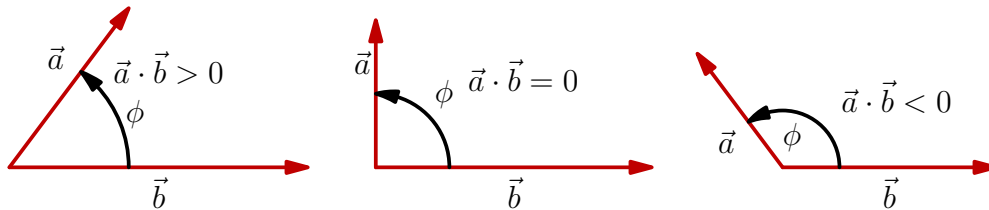
- osim komutativnosti vrijedi

$$(n\vec{a}) \cdot \vec{b} = |n\vec{a}| |\vec{b}| \cos \phi = n |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \phi = n \vec{a} \cdot \vec{b} \quad (5)$$

- treće važno svojstvo je distributivnost

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \quad (6)$$

- iz formule (3) slijedi da skalarni produkt vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  iščezava u tri slučaja
  - duljina vektora  $\vec{a}$  je nula
  - duljina vektora  $\vec{b}$  je nula
  - kut između vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  je  $\phi = 90^\circ$  jer je  $\cos 90^\circ = 0$
- ovisno o kutu  $\phi$  skalarni produkt može biti pozitivan ( $0 \leq \phi \leq 90^\circ$ ) ili negativan ( $90^\circ \leq \phi \leq 180^\circ$ )
- u prvom slučaju je kut između vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  šiljat, a u drugom tup



Slika 9: Primjer šiljatog, pravog i tupog kuta.

- jedinični vektori  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  i  $\vec{k}$  su međusobno okomiti pa vrijedi

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \quad (7)$$

- isto tako, kvadrat jediničnih vektora iznosi 1

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \quad (8)$$

- bilo koji vektor možemo napisati kao linearnu kombinaciju jediničnih vektora

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad \text{i} \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \quad (9)$$

- skalarni produkt

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\ &= a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \cdot \vec{k} \\ &= a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \cdot \vec{j} + a_y b_z \vec{j} \cdot \vec{k} \\ &= a_z b_x \vec{k} \cdot \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \cdot \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \cdot \vec{k} \end{aligned} \quad (10)$$

- iskoristimo relacije (8) i (7)

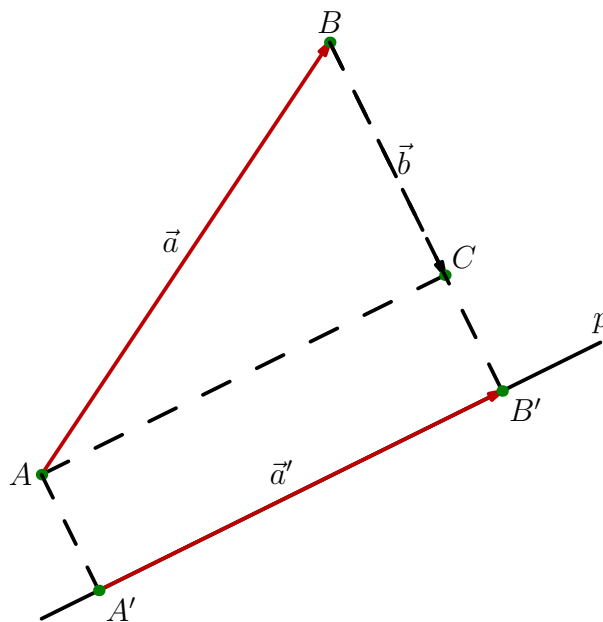
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (11)$$

- ako su zadane komponente dva vektora, možemo izračunati kut između njih

$$\cos \phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (12)$$

## 2.2 Ortogonalna projekcija vektora na pravac

- označimo projekciju vektora  $\vec{a}$  na pravac  $p$  s  $\vec{a}'$

Slika 10: Projekcija vektora  $\vec{a}$  na pravac  $p$ .

- iz pravokutnog trokuta  $ACB$  slijedi

$$\vec{a} = \vec{a'} + \vec{b} \quad (13)$$

- vektor  $\vec{a}$  smo rastavili na vektor  $\vec{a'}$  koji leži na pravcu  $p$  i vektor  $\vec{b}$  koji je okomit na pravac  $p$
- neka je  $\vec{u}$  jedinični vektor koji pripada pravcu  $p$
- skalarni produkt  $\vec{u} \cdot \vec{a}$  daje duljinu projekcije vektora  $\vec{a}$  na pravac  $p$
- ako pomnožimo duljinu projekcije s vektorom  $\vec{u}$  dobit ćemo vektor  $\vec{a'}$
- možemo pokazati da je vektor

$$\vec{b} = \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{u}) \vec{u} \quad (14)$$

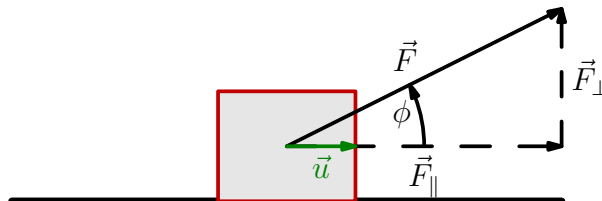
okomit na vektor  $\vec{u}$

$$\vec{b} \cdot \vec{u} = \vec{a} \cdot \vec{u} - (\vec{a} \cdot \vec{u}) (\vec{u} \cdot \vec{u}) = 0 \quad (15)$$

- vektor  $\vec{a}$  smo rastavili na sumu vektora  $\vec{a'}$  paralelnog s pravcem  $p$  i vektora  $\vec{b}$  okomitog na pravac  $p$

Primjer

- vučemo kvadar silom  $\vec{F}$  pod kutem  $\phi$  u odnosu na smjer gibanja (horizontalni)

Slika 11: Sila  $\vec{F}$  koja djeluje na tijelo pod kutem  $\phi$ .

- ako želimo izračunati rad, trebamo komponentu sile u smjeru puta
- u ovom slučaju je to komponenta

$$\vec{F}_{\parallel} = (\vec{F} \cdot \vec{u})\vec{u} \quad (16)$$

- pritom  $\vec{u}$  označava jedinični vektor u smjeru puta (tj. u horizontalnom smjeru)
- kut između vektora  $\vec{F}$  i  $\vec{u}$  iznosi  $\phi$  pa vrijedi

$$\vec{F}_{\parallel} = (\vec{F} \cdot \vec{u})\vec{u} = F \cos \phi \vec{u} \quad (17)$$

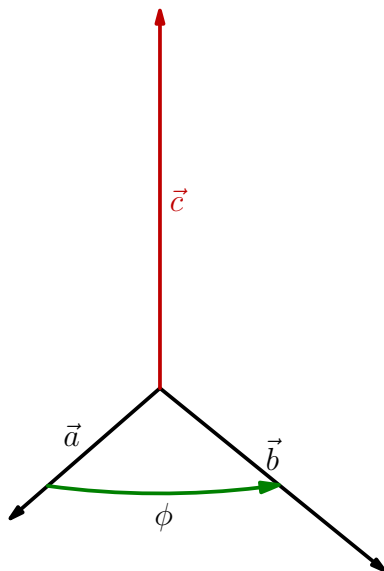
### 3 Vektorski produkt

- osim skalarnog, definiramo i vektorski produkt dva vektora

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad (18)$$

- duljina vektora  $\vec{c}$  iznosi

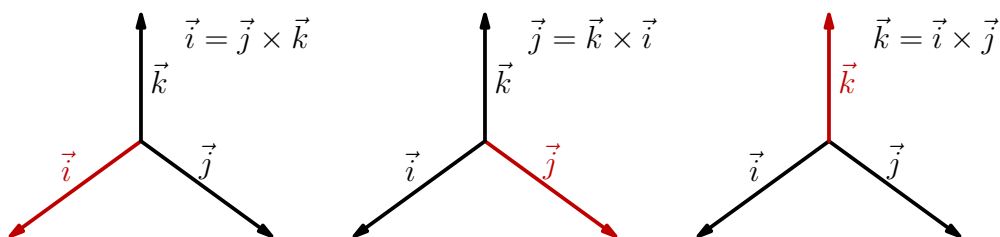
$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \phi \quad (19)$$

Slika 12: Vektorski produkt vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .

- smjer vektora  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  određujemo pravilom desne ruke: prsti pokazuju u smjeru od vektora  $\vec{a}$  prema vektoru  $\vec{b}$ , a palac onda pokazuje smjer vektora  $\vec{c}$
- odmah slijedi da je vektorski produkt antikomutativan

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (20)$$

- vektorski produkti jediničnih vektora prikazani su na slici



Slika 13: Vektorski produkti jediničnih vektora.

- za vektorske produkte jediničnih vektora vrijede sljedeće relacije

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad (21)$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad (22)$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \quad (23)$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \quad (24)$$

$$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \quad (25)$$

$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \quad (26)$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = 0 \quad (27)$$

$$\vec{j} \times \vec{j} = 0 \quad (28)$$

$$\vec{k} \times \vec{k} = 0 \quad (29)$$

$$(30)$$

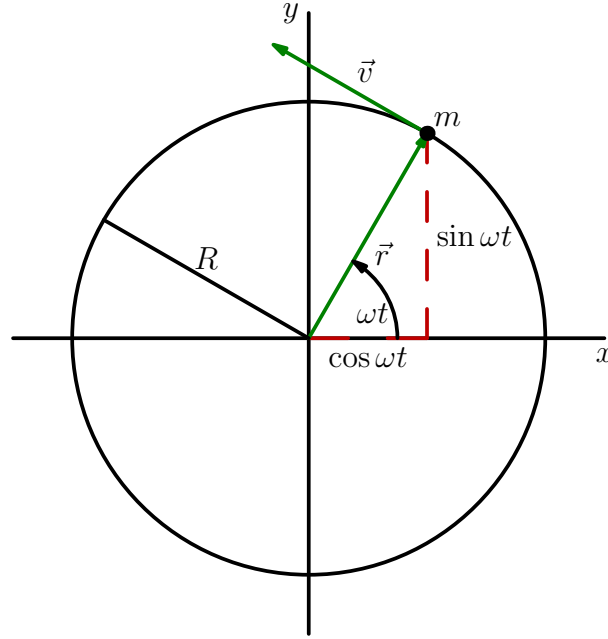
- sada možemo izračunati vektorski produkt dva proizvoljna vektora

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\ &= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y \vec{i} \times \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \times \vec{k} \\ &\quad + a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y \vec{j} \times \vec{j} + a_y b_z \vec{j} \times \vec{k} \\ &\quad + a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y \vec{k} \times \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \times \vec{k} \\ &= a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \end{aligned} \quad (31)$$

- umjesto krajnje formule (31) jednostavnije je zapamtiti kako glase vektorski produkti jediničnih vektora

Primjer: zakretni impuls čestice

- želimo izračunati zakretni impuls čestice mase  $m$  koja se giba konstatnom kutnom briznom  $\omega$  po kružnici radijusa  $r$

Slika 14: Čestica se giba po kružnici konstantnom kutnom brzinom  $\omega$ 

- položaj čestice

$$\vec{r} = R \cos \omega t \vec{i} + R \sin \omega t \vec{j} \quad (32)$$

- brzinu čestice možemo izračunati tako da deriviramo vektor  $\vec{r}$  po vremenu

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -R\omega \sin \omega t \vec{i} + R\omega \cos \omega t \vec{j} \quad (33)$$

- zakretni impuls čestice

$$\vec{M} = m\vec{r} \times \vec{v} \quad (34)$$

- uvrstimo vektor položaja i brzine

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \vec{v} &= (R \cos \omega t \vec{i} + R \sin \omega t \vec{j}) \times (-R\omega \sin \omega t \vec{i} + R\omega \cos \omega t \vec{j}) \\ &= -R^2 \cos \omega t \sin \omega t (\vec{i} \times \vec{i}) - R^2 \sin^2 \omega t (\vec{j} \times \vec{i}) \\ &\quad + R^2 \sin \omega t \cos \omega t (\vec{j} \times \vec{j}) + R^2 \omega \cos^2 \omega t (\vec{i} \times \vec{j}) \end{aligned} \quad (35)$$

- sada iskoristimo vektorske produkte jediničnih vektora

$$\vec{r} \times \vec{v} = R^2 \omega (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) \vec{k} = R^2 \omega \vec{k} \quad (36)$$

- zakretni impuls čestice

$$\vec{M} = mR^2 \omega \vec{k} \quad (37)$$

## 4 Zadaci za vježbu

### Zadatak 1

Čestica mase  $m$  giba se po putanji

$$\vec{r} = a \cos \omega t \vec{i} + b \sin \omega t \vec{j}$$

Izračunajte zakretni impuls čestice.

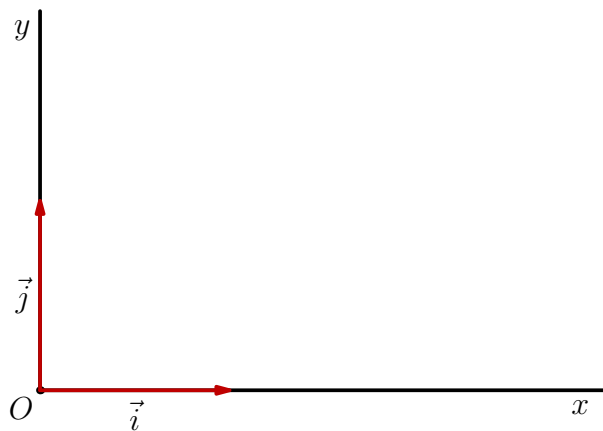
# Analitička geometrija u ravnini

September 5, 2008

## 1 Vektori u koordinatnom sustavu

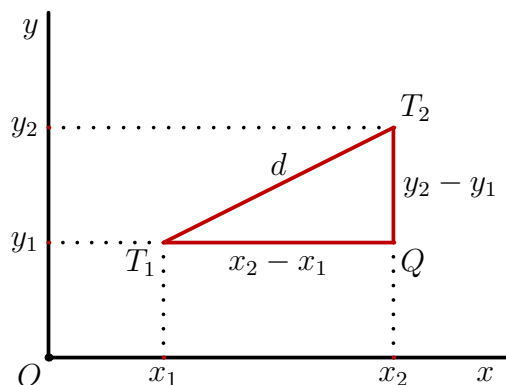
### 1.1 Udaljenost točaka u koordinatnom sustavu

- pravokutni koordinatni sustav potpuno je određen
  - ishodištem  $O$
  - jediničnim vektorima  $\vec{i}$  i  $\vec{j}$



Slika 1: Pravokutni koordinatni sustav u ravnini.

- promotrimo dvije točke u ravnini:  $T_1(x_1, y_1)$  i  $T_2(x_2, y_2)$

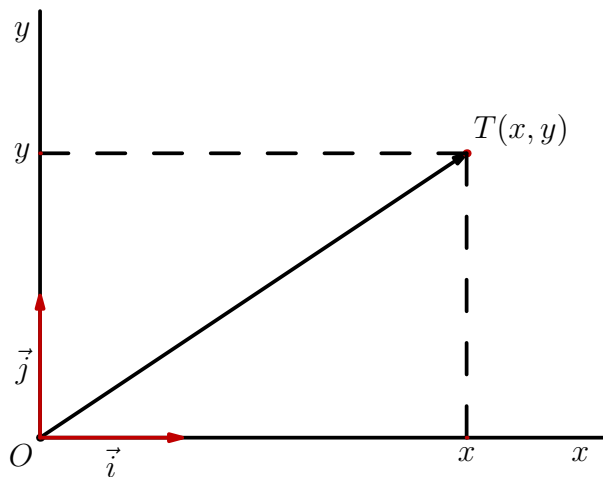
Slika 2: Udaljenost točaka  $T_1$  i  $T_2$  u ravnini.

- udaljenost  $d$  između točaka  $T_1$  i  $T_2$  možemo izračunati pomoću Pitagorinog teorema

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \implies d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1)$$

## 1.2 Koordinate i duljine vektora u koordinatnom sustavu

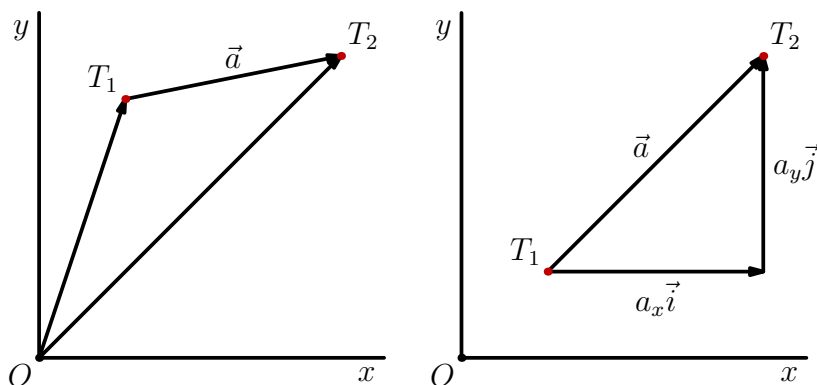
- promatramo točku u ravnini  $T(x, y)$

Slika 3: Vektor s hvatištem u ishodištu i krajem u točki  $O$ .

- povučemo vektor od ishodišta do točke  $T$

$$\overrightarrow{OT} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad (2)$$

- nešto složeniji problem dobijemo ako tražimo koordinate vektora između dvije proizvoljne točke u ravnini
- označimo s  $\vec{a}$  vektor koji ima početak u točki  $T_1(x_1, y_1)$  i kraj u točki  $T_2(x_2, y_2)$



Slika 4: Vektor s hvatištem u točki  $T_1$  i krajem u točki  $T_2$ .

- iz sl. 4 slijedi

$$\overrightarrow{OT_2} = \overrightarrow{OT_1} + \vec{a} \implies \vec{a} = \overrightarrow{OT_2} - \overrightarrow{OT_1} \quad (3)$$

- u jedn. (3) uvrstimo poznate izraze

$$\overrightarrow{OT_1} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{OT_2} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} \quad (4)$$

$$\vec{a} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} - (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}) = (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j} \quad (5)$$

- vektor  $\vec{a}$  također možemo rastaviti na komponente

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \quad (6)$$

- izraze uz  $\vec{i}$  i  $\vec{j}$  možemo izjednačiti jer su vektori  $\vec{i}$  i  $\vec{j}$  linearno nezavisni

$$\implies a_x = x_2 - x_1 \quad \text{i} \quad a_y = y_2 - y_1 \quad (7)$$

- komponentu  $a_x$  dobijemo tako da od  $x$  koordinate krajnje točke vektora oduzmemo  $x$  koordinatu njegove početne točke
- komponentu  $a_y$  dobijemo tako da od  $y$  koordinate krajnje točke vektora oduzmemo  $y$  koordinatu njegove početne točke
- vektor  $\vec{a}$  možemo napisati u obliku

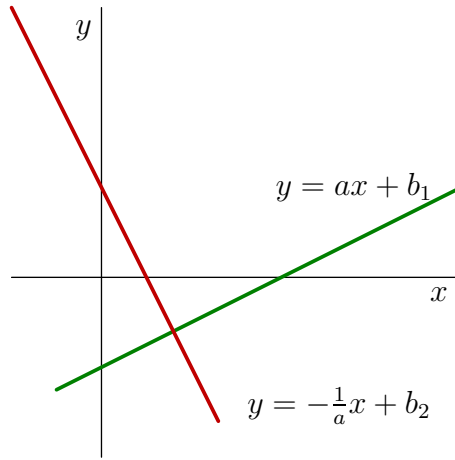
$$\vec{a} = (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j} \quad (8)$$

- duljina vektora  $\vec{a}$  jednaka je udaljenosti točaka  $T_1$  i  $T_2$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (9)$$

### 1.3 Okomitost vektora

- želimo izvesti uvjet okomitosti vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$



Slika 5: Okomiti vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .

- vektor  $\vec{c}$  jednak je razlici vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \quad (10)$$

- ako su vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  okomiti, vrijedi Pitagorin poučak

$$\vec{c}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 \quad (11)$$

- komponente vektora  $\vec{c}$

$$c_x = a_x - b_x \quad \text{i} \quad c_y = a_y - b_y \quad (12)$$

- uvrstimo komponente vektora  $\vec{c}$  u jednadžbu (11)

$$c_x^2 + c_y^2 = (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 = a_x^2 + b_x^2 - 2a_x b_x + a_y^2 + b_y^2 - 2a_y b_y \quad (13)$$

- sada možemo izvesti uvjet okomitosti vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$

$$a_x^2 + b_x^2 - 2a_x b_x + a_y^2 + b_y^2 - 2a_y b_y = a_x^2 + a_y^2 + b_x^2 + b_y^2 \quad (14)$$

$$\implies a_x b_x + a_y b_y = 0 \quad (15)$$

- u općenitom slučaju vektora u prostoru uvjet okomitosti glasi

$$\implies a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \quad (16)$$

- uvjet (16) ekvivalentan je uvjetu

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad (17)$$

## 2 Jednadžba pravca

### 2.1 Eksplicitni oblik jednadžbe pravca

- graf polinoma prvog stupnja

$$f(x) = ax + b \quad (18)$$

predstavlja pravac u ravnini

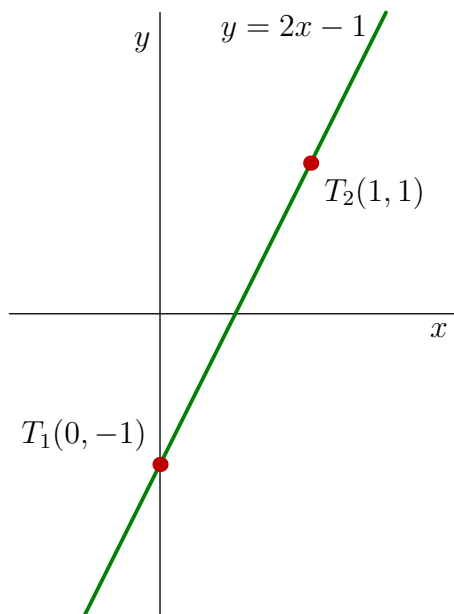
- da bi konstruirali graf funkcije (18) dovoljno je nacrtati dvije točke s koordinatama  $T(x, f(x))$  i provući pravac kroz njih

Primjer:  $f(x) = 2x - 1$

- potrebne su nam dvije točke za konstrukciju grafa:  $T_1(x_1, f(x_1))$  i  $T_2(x_2, f(x_2))$
- npr., možemo izabrati  $x_1 = 0$  i  $x_2 = 1$

$$\implies T_1(0, -1) \quad \text{ i } \quad T_2(1, 1) \quad (19)$$

- kroz točke povučemo pravac



Slika 6: Konstrukcija pravca.

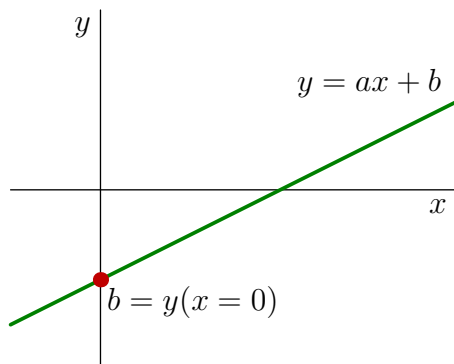
- jednadžbu

$$y(x) = ax + b \quad (20)$$

obično zovemo eksplicitni oblik jednadžbe pravca  $p$

- parametar  $a$  zovemo koeficijent smjera pravca  $p$
- koeficijent  $b$  odgovara odsječku pravca  $p$  na osi  $y$

$$y(x = 0) = a \cdot 0 + b = b \quad (21)$$

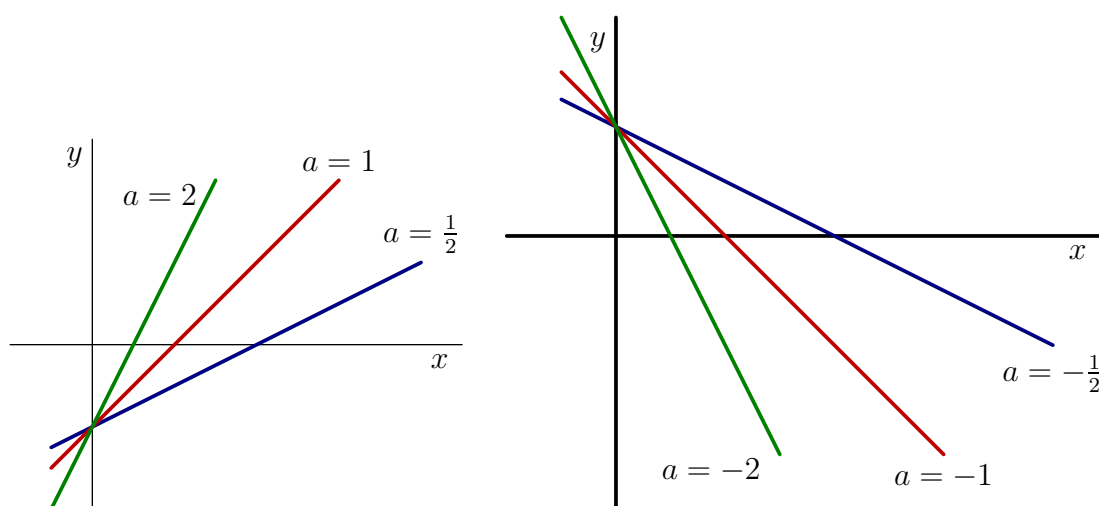
Slika 7: Odsječak pravca na osi  $y$ .

- koeficijent smjera mjeri nagib pravca
- ako je koeficijent smjera pozitivan funkcija  $f(x) = ax + b$  je strogo rastuća

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) \quad (22)$$

- ako je koeficijent smjera negativan funkcija  $f(x) = ax + b$  je strogo padajuća

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2) \quad (23)$$



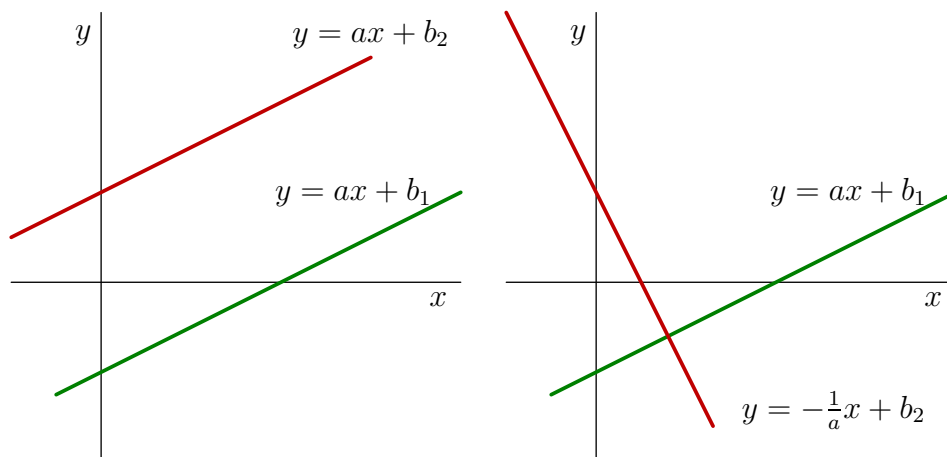
Slika 8: Primjeri pravaca s različitim koeficijentima smjera.

- što je apsolutna vrijednost koeficijenta smjera veća, pravac brže raste ili pada
- pravci  $y = a_1x + b_1$  i  $y = a_2x + b_2$  su paralelni ako su im koeficijenti smjera jednaki tj. ako vrijedi

$$a_2 = a_1 \quad (24)$$

- pravci  $y = a_1x + b_1$  i  $y = a_2x + b_2$  su okomiti ako vrijedi

$$a_2 = -\frac{1}{a_1} \quad (25)$$



Slika 9: Primjer paralelnih i okomitih pravaca.

## 2.2 Implicitni oblik jednadžbe pravca

- prvo ćemo izvesti jednadžbu pravca za koji je zadan koeficijent smjera i jedna točka kroz koju pravac prolazi
- označimo zadanu točku s  $T_1(x_1, y_1)$
- pravac prolazi kroz točku  $T_1$  pa sigurno vrijedi

$$y_1 = ax_1 + b \implies b = y_1 - ax_1 \quad (26)$$

- parametar  $b$  uvrstimo u jedn. 20 i dolazimo do jednadžbe pravca s koeficijentom smjera  $a$  koji prolazi kroz točku  $T_1(x_1, y_1)$

$$y = ax + b \implies y = ax + y_1 - ax_1 \implies y - y_1 = a(x - x_1) \quad (27)$$

- u sljedećem koraku izvodimo jednadžbu pravca ako su nam zadane dvije točke kroz koje pravac prolazi  $T_1(x_1, y_1)$  i  $T_2(x_2, y_2)$
- pravac prolazi kroz točke  $T_1$  i  $T_2$  pa sigurno vrijedi

$$y_1 = ax_1 + b \quad (28)$$

$$y_2 = ax_2 + b \quad (29)$$

- iz jedn. (28) izrazimo odsječak  $b$

$$b = y_1 - ax_1, \quad (30)$$

i uvrstimo ga u jedn. (29)

$$y_2 = ax_2 + y_1 - ax_1 \implies a(x_2 - x_1) = y_2 - y_1 \quad (31)$$

- pod uvjetom da vrijedi  $x_1 \neq x_2$  možemo napisati

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (32)$$

- jednačba pravca koji prolazi kroz točke  $T_1(x_1, y_1)$  i  $T_2(x_2, y_2)$  glasi

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad (33)$$

### 3 Krivulje drugog reda

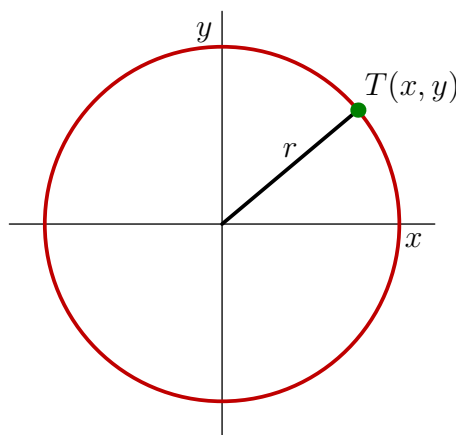
#### 3.1 Kružnica

- pretpostavimo da u ravnini leži točka  $C$  i da je zadan realni broj  $r$
- skup svih točaka u ravnini koje su od točke  $C$  udaljene za  $r$  zovemo kružnica radijusa  $r$
- točka  $C$  je središte kružnice
- u najjednostavnijem slučaju kružnica ima središte u ishodištu
- udaljenost točke  $T(x, y)$  od ishodišta  $O$

$$d(T, O) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (34)$$

- jednačba kružnice radijusa  $r$  sa središtem u ishodištu glasi

$$d(T, O) = r \implies \sqrt{x^2 + y^2} = r \implies x^2 + y^2 = r^2 \quad (35)$$



Slika 10: Kružnica radijusa  $r$  sa središtem u ishodištu

## 3.2 Elipsa

### 3.2.1 Definicija elipse

- pretpostavimo da u ravni leže dvije točke  $F_1$  i  $F_2$  udaljene za

$$d(F_1, F_2) \equiv 2c \quad (36)$$

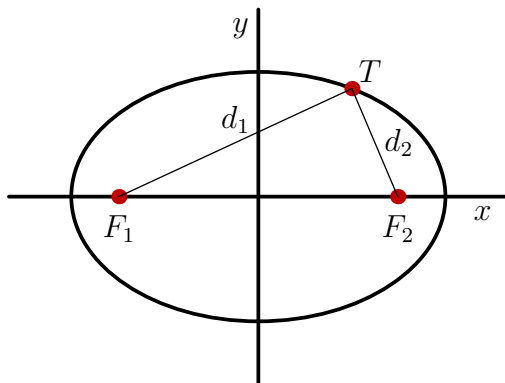
- neka je  $a$  realan broj za koji vrijedi

$$a > \frac{1}{2}d(F_1, F_2) \implies a > c \quad (37)$$

- skup svih točaka ravnine za koje zbroj udaljenosti od točaka  $F_1$  i  $F_2$  iznosi  $2a$

$$d(F_1, T) + d(F_2, T) \equiv d_1 + d_2 = 2a, \quad (38)$$

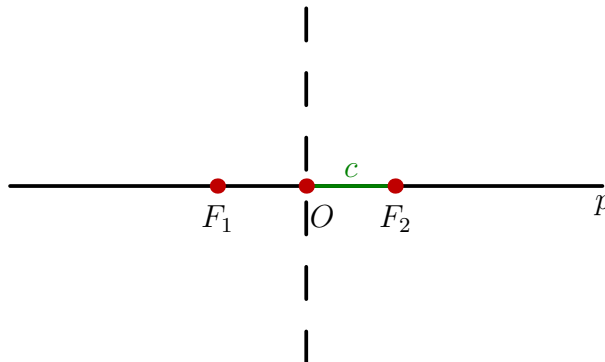
zovemo elipsa



Slika 11: Primjer elipse

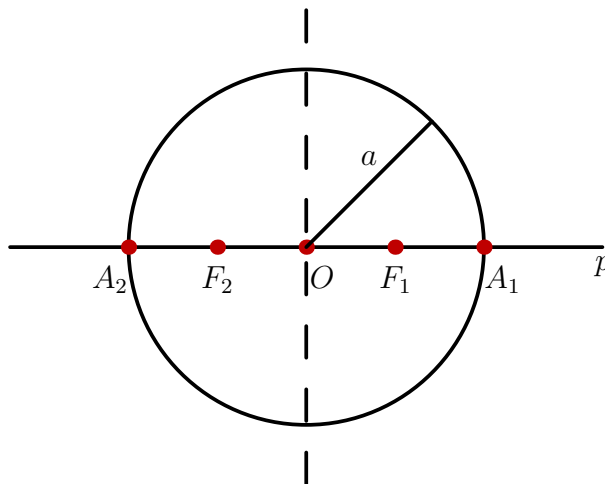
### 3.2.2 Konstrukcija elipse

- želimo konstruirati elipsu kojoj su zadani fokusi, kao i zbroj udaljenosti točke elipse od fokusa
- nacrtamo točke  $F_1$  i  $F_2$  u ravni, pravac  $p$  koji prolazi kroz njih i točku  $O$  koja se nalazi na polovištu dužine  $\overline{F_1F_2}$
- udaljenost točaka  $F_1$  i  $F_2$  iznosi  $2c$



Slika 12: Prvi korak pri konstrukciji elipse

- nacrtamo kružnicu radijusa  $a$  sa središtem u točki  $O$
- kružnica siječe pravac  $p$  u točkama  $A_1$  i  $A_2$



Slika 13: Drugi korak pri konstrukciji elipse

- udaljenost točke  $A_1$  od fokusa  $F_1$

$$d(A_1, F_1) = |\overline{A_1 F_1}| = |\overline{O A_1}| - |\overline{O F_1}| = a - c \quad (39)$$

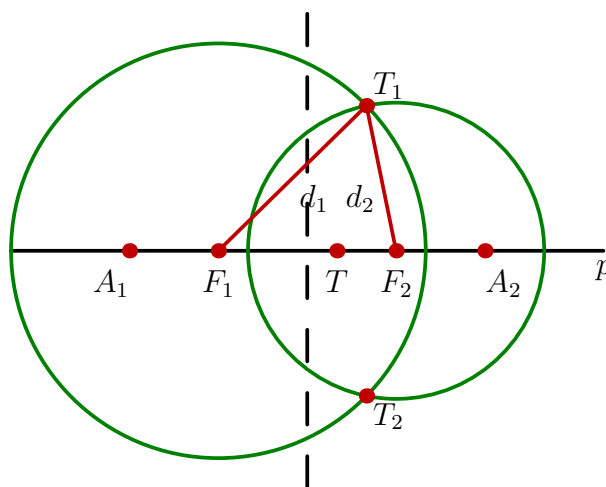
- udaljenost točke  $A_1$  od fokusa  $F_2$

$$d(A_1, F_2) = |\overline{A_1 F_2}| = |\overline{O A_1}| + |\overline{O F_2}| = a + c \quad (40)$$

- zbroj udaljenosti točke  $A_1$  od fokusa

$$d(A_1, F_1) + d(A_1, F_2) = a - c + a + c = 2a \quad (41)$$

- točka  $A_1$  se očito nalazi na elipsi
- istim postupkom bi zaključili da se i točka  $A_2$  nalazi na elipsi
- u sljedećem koraku odaberemo bilo koju točku  $T$  na dužini  $F_1F_2$
- oko točke  $F_1$  opišemo kružnicu radijusa  $d_1 = d(A_1, T)$ , a oko točke  $F_2$  kružnicu radijusa  $d_2 = d(A_2, T)$



Slika 14: Treći korak pri konstrukciji elipse

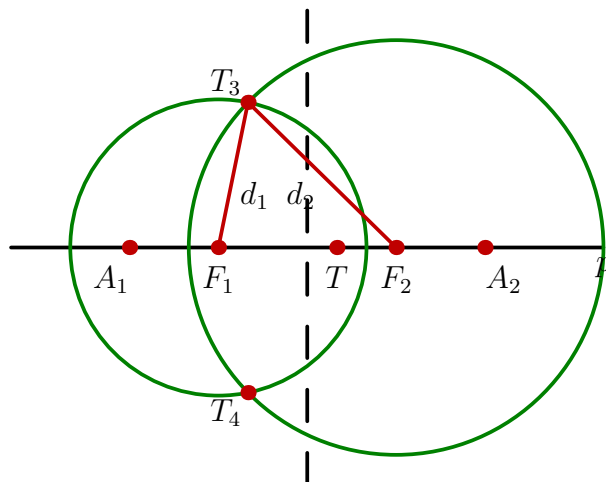
- dvije kružnice se sijeku u točkama  $T_1$  i  $T_2$
- promotrimo točku  $T_1$
- zbroj udaljenosti točke  $T_1$  od fokusa  $F_1$  i  $F_2$  iznosi

$$d(F_1, T_1) + d(F_2, T_1) = d_1 + d_2 = d(A_1, T) + d(A_2, T) = d(A_1, A_2) = 2a \quad (42)$$

- jednako tako vrijedi

$$d(F_1, T_2) + d(F_2, T_2) = d_1 + d_2 = d(A_1, T) + d(A_2, T) = d(A_1, A_2) = 2a \quad (43)$$

- točke  $T_1$  i  $T_2$  također pripadaju elipsi
- sada oko točke  $F_1$  opišemo kružnicu radijusa  $d(A_2, T)$ , a oko točke  $F_2$  kružnicu radijusa  $d(A_1, T)$



Slika 15: Četvrti korak pri konstrukciji elipse

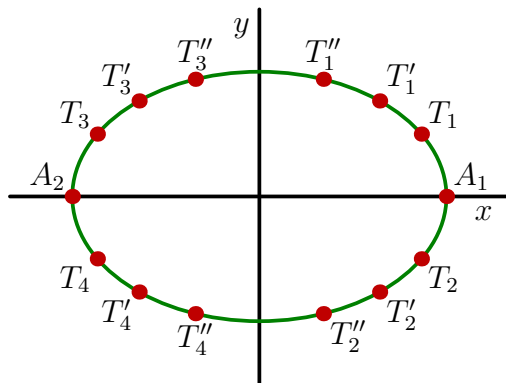
- dvije kružnice sijeku se u točkama  $T_3$  i  $T_4$
- promotrimo točku  $T_3$
- zbroj udaljenosti točke  $T_3$  od fokusa  $F_1$  i  $F_2$  iznosi

$$d(F_1, T_3) + d(F_2, T_3) = r_1 + r_2 = d(A_2, T) + d(A_1, T) = d(A_2, A_1) = 2a \quad (44)$$

- jednako tako vrijedi

$$d(F_1, T_4) + d(F_2, T_4) = r_1 + r_2 = d(A_2, T) + d(A_1, T) = d(A_2, A_1) = 2a \quad (45)$$

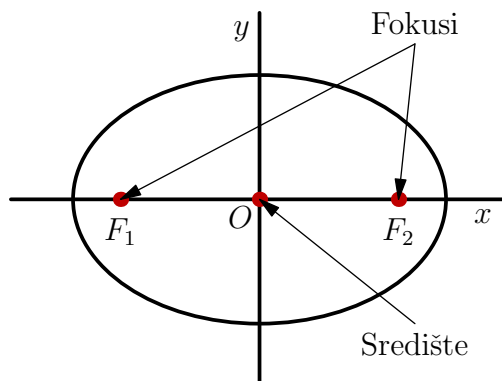
- točke  $T_3$  i  $T_4$  također pripadaju elipsi
- odabirom različitih točaka  $T$  možemo odrediti više točaka elipse i spojiti ih



Slika 16: Konstrukcija elipse.

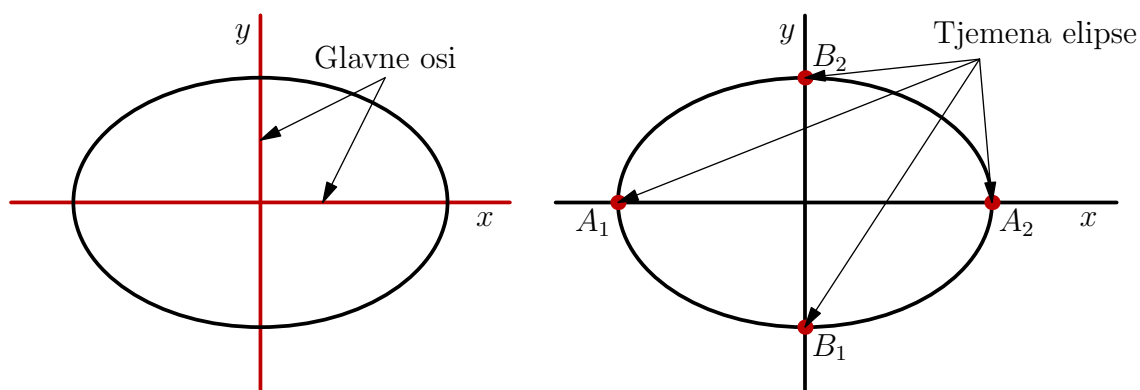
## 3.2.3 Svojstva elipse

- osnovni pojmovi vezani uz elipsu
  - fokusi ili žarišta elipse: točke  $F_1$  i  $F_2$
  - središte elipse: polovište  $O$  dužine  $\overline{F_1F_2}$



Slika 17: Fokusi i središte elipse.

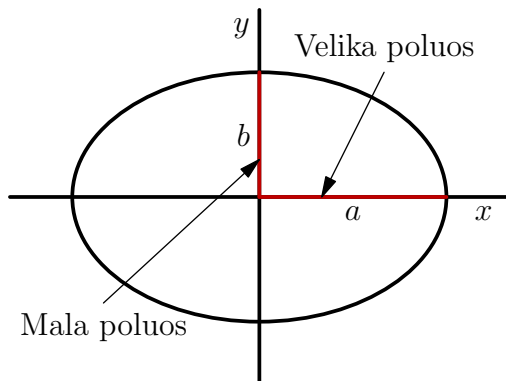
- prva glavna os elipse: pravac kroz fokuse
- druga glavna os elipse: pravac okomit na prvu glavnu os koji prolazi kroz središte elipse
- tjemena ili vrhovi elipse: sjecišta elipse s glavnim osima



Slika 18: Glavne osi i tjemena elipse.

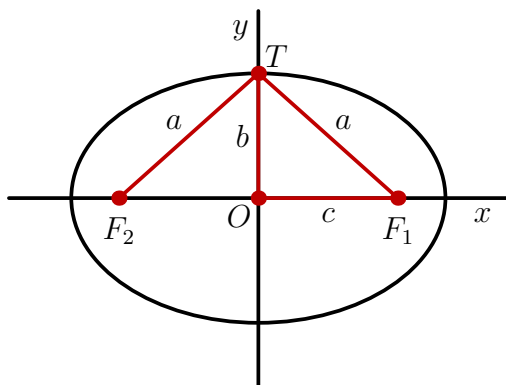
- linearni ekscentricitet elipse:  $c = d(F_1, F_2)/2$
- velika poluos elipse:  $a = d(O, A_1) = d(O, A_2)$

- mala poluos elipse:  $b = d(O, B_1) = d(O, B_2)$



Slika 19: Velika i mala poluos elipse.

- numerički ekscentricitet elipse:  $e = c/a$
- koristeći definiciju elipse možemo izvesti relaciju koja povezuje malu poluos, veliku poluos i udaljenost fokusa od ishodišta

Slika 20: Dokaz relacije  $a^2 = b^2 + c^2$ .

- promotrimo točku  $T$  na sl. 20
- trokut  $\triangle F_1 F_2 T$  je jednakokrakan, a zbroj udaljenosti točke  $T$  od fokusa iznosi  $2a$
- duljina svakog kraka trokuta  $\triangle F_1 F_2 T$  mora biti jednaka  $a$
- sada primjenimo Pitagorin poučak na trokut  $\triangle T O F_1$
- slijedi relacija između velike poluosi  $a$ , male poluosi  $b$  i koordinate fokusa  $c$

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (46)$$

### 3.2.4 Jednadžba elipse

- ako su  $a$  i  $b$  poluosi elipse i ako se osi koordinatnog sustava poklapaju s glavnim osima elipse, tada jednadžba elipse glasi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (47)$$

- trebamo dokazati dvije tvrdnje

Tvrdnja 1: ako točka  $T(x, y)$  pripada elipsi njezine koordinate zadovoljavaju jedn. (47)

- točka  $T$  prema pretpostavci pripada elipsi
- to znači da zbroj udaljenosti točke  $T$  od fokusa iznosi  $2a$

$$d(T, F_1) + d(T, F_2) = 2a \quad (48)$$

- koordinate fokusa

$$F_1(-c, 0) \quad \text{i} \quad F_2(c, 0) \quad (49)$$

- udaljenost točke od fokusa

$$d(T, F_1) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \text{i} \quad d(T, F_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad (50)$$

- jedn. (48) prelazi u

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad (51)$$

- jedan od korijena prebacimo na desnu stranu jednadžbe

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad (52)$$

- kvadriramo gornju jednadžbu

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \quad (53)$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \quad (54)$$

$$2xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2xc \quad (55)$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc \quad (56)$$

$$a^2 [(x-c)^2 + y^2] = (a^2 - xc)^2 \quad (57)$$

$$a^2 [x^2 - 2xc + c^2 + y^2] = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \quad (58)$$

$$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \quad (59)$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad (60)$$

- iskoristimo relaciju između velike i male poluosi

$$b^2 = a^2 - c^2 \implies x^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2 \quad (61)$$

- podijelimo prethodnu jednadžbu s  $a^2 b^2$  i dolazimo do jednadžbe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (62)$$

koju smo trebali pokazati

Tvrđnja 2: ako koordinate točke  $T(x, y)$  zadovoljavaju jedn. (47) onda točka pripada elipsi

- trebamo pokazati da zbroj udaljenosti točke  $T$  od fokusa iznosi  $2a$
- udaljenost točke  $T$  od fokusa  $F_1$

$$d(T, F_1)^2 = (x + c)^2 + y^2 = x^2 + 2xc + c^2 + y^2 \quad (63)$$

- koordinate točke zadovoljavaju jedn. (47)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \implies y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 \quad (64)$$

- udaljenost od fokusa

$$d(T, F_1)^2 = x^2 + 2xc + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 = x^2 \frac{a^2 - b^2}{a^2} + 2xc + c^2 + b^2 \quad (65)$$

- iskoristimo relaciju  $b^2 = a^2 - c^2$

$$d(T, F_1)^2 = \frac{c^2}{a^2} x^2 + 2xc + a^2 = \left( \frac{c}{a} x + a \right)^2 \quad (66)$$

- jednakim postupkom bi došli do udaljenosti točke  $T$  od drugog fokusa

$$d(T, F_2)^2 = \left( a - \frac{c}{a} x \right)^2 \quad (67)$$

- dakle, zbroj udaljenosti zaista iznosi  $2a$

$$d(T, F_1) + d(T, F_2) = \left( a + \frac{c}{a} x \right) + \left( a - \frac{c}{a} x \right) = 2a \quad (68)$$

### 3.3 Hiperbola

#### 3.3.1 Definicija hiperbole

- pretpostavimo da u ravnini leže dvije točke  $F_1$  i  $F_2$  udaljene za

$$d(F_1, F_2) = 2c \quad (69)$$

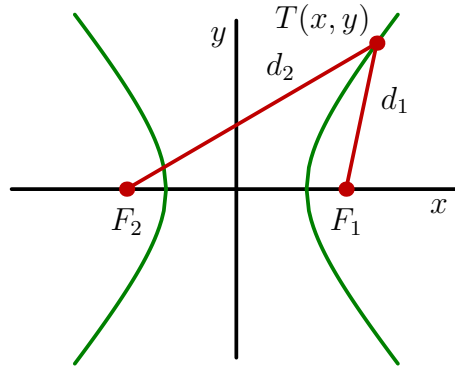
- neka je  $a$  realan broj za koji vrijedi

$$a < \frac{1}{2}d(F_1, F_2) \implies a < c \quad (70)$$

- skup svih točaka ravnine za koje apsolutna vrijednost razlike udaljenosti od točaka  $F_1$  i  $F_2$  iznosi  $2a$

$$|d(F_1, T) - d(F_2, T)| = 2a, \quad (71)$$

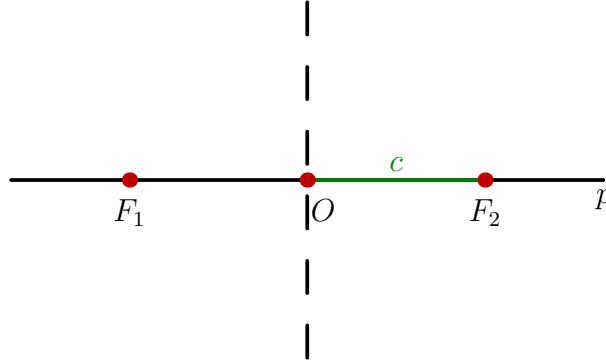
zovemo hiperbola



Slika 21: Primjer hiperbole.

#### 3.3.2 Konstrukcija hiperbole

- želimo konstruirati hiperbolu kojoj su zadani fokusi, kao i razlika udaljenosti točke hiperbole od fokusa
- nacrtamo točke  $F_1$  i  $F_2$  u ravnini, pravac  $p$  koji prolazi kroz njih i točku  $O$  koja se nalazi na polovištu dužine  $\overline{F_1 F_2}$
- udaljenost točaka  $F_1$  i  $F_2$  iznosi  $2c$



Slika 22: Prvi korak pri konstrukciji hiperbole

- nacrtamo kružnicu radijusa  $a$  sa središtem u ishodištu sustava
- kružnica siječe pravac  $p$  u točkama  $A_1$  i  $A_2$
- udaljenost točke  $A_1$  od fokusa  $F_1$

$$d(A_1, F_1) = d(O, F_1) - d(O, A_1) = c - a \quad (72)$$

- udaljenost točke  $A_1$  od fokusa  $F_2$

$$d(A_1, F_2) = d(O, F_2) + d(O, A_1) = c + a \quad (73)$$

- apsolutna vrijednost razlika udaljenosti

$$|d(A_1, F_1) - d(A_1, F_2)| = |c - a - c - a| = 2a \quad (74)$$

- točka  $A_1$  očito pripada hiperboli
- jednakim postupkom bi pokazali da točka  $A_2$  također pripada hiperboli
- sada odaberemo točku  $T$  koja leži na pravcu  $p$ , ali se nalazi izvan dužine  $\overline{F_1 F_2}$
- nacrtamo jednu kružnicu radijusa  $d(T, A_1)$  sa središtem u fokusu  $F_1$  i drugu kružnicu radijusa  $d(T, A_2)$  sa središtem u fokusu  $F_2$
- dvije kružnice se sijeku u točkama  $T_1$  i  $T_2$
- udaljenost točaka  $T_1$  i  $T_2$  od fokusa  $F_1$  jednaka je radijusu prve kružnice

$$d(T, A_1) = d(O, T) - d(O, A_1) = d(O, T) - a \quad (75)$$

- udaljenost točaka  $T_1$  i  $T_2$  od fokusa  $F_2$  jednaka je radijusu druge kružnice

$$d(T, A_2) = d(O, T) + d(O, A_2) = d(O, T) + a \quad (76)$$

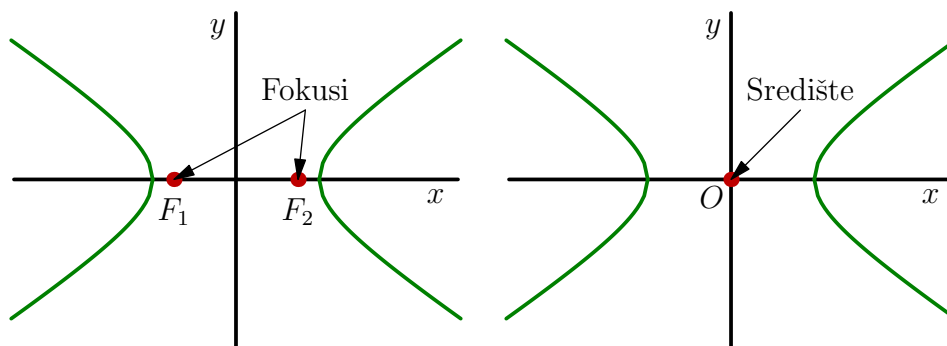
- apsolutna vrijednost razlike udaljenosti u oba slučaja iznosi

$$|d(T, A_1) - d(T, A_2)| = |d(T, O) - a - d(T, O) - a| = 2a \quad (77)$$

- točke  $T_1$  i  $T_2$  pripadaju elipsi
- u sljedećem koraku nacrtamo jednu kružnicu radijusa  $d(T, A_1)$  sa središtem u fokusu  $F_2$  i drugu kružnicu radijusa  $d(T, A_2)$  sa središtem u fokusu  $F_1$
- dvije kružnice se sijeku u točkama  $T_3$  i  $T_4$
- jednakim postupkom kao u prethodnom koraku pokazali da točke  $T_3$  i  $T_4$  pripadaju hiperboli
- ako postupak ponovimo za više točaka  $T$  doći ćemo do niza točaka koje pripadaju hiperboli, a time i do same hiperbole

### 3.3.3 Svojstva hiperbole

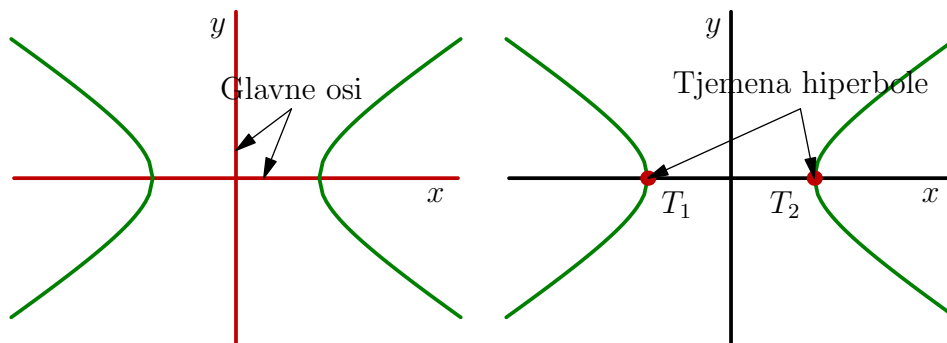
- osnovni pojmovi vezani uz hiperbolu
  - fokusi ili žarišta hiperbole: točke  $F_1$  i  $F_2$
  - središte hiperbole: polovište  $O$  dužine  $\overline{F_1 F_2}$



Slika 23: Fokusi i središte hiperbole.

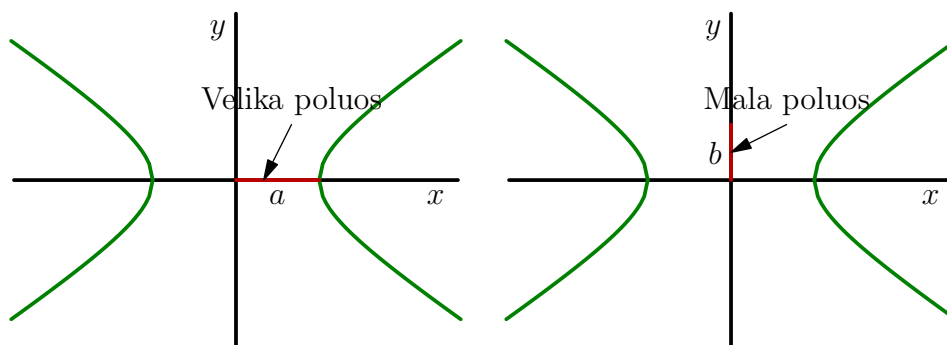
- prva glavna os hiperbole: pravac kroz fokuse

- druga glavna os hiperbole: pravac okomit na prvu glavnu os koji prolazi kroz središte hiperbole
- tjemena ili vrhovi hiperbole: sjecišta hiperbole s glavnim osima



Slika 24: Glavne osi i tjemena hiperbole.

- linearni ekscentricitet hiperbole:  $c = d(F_1, F_2)/2$
- velika poluos hiperbole:  $a = d(O, A_1) = d(O, A_2)$
- mala poluos hiperbole:  $b = d(O, B_1) = d(O, B_2)$



Slika 25: Velika i mala poluos hiperbole.

- numerički ekscentricitet hiperbole:  $e = c/a$

### 3.3.4 Jednadžba hiperbole

- pretpostavimo da se osi koordinatnog sustava poklapaju s glavnim osima hiperbole i da fokusi hiperbole pritom leže na osi  $x$

- jednadžba hiperbole tada glasi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (78)$$

- trebamo pokazati dvije tvrdnje

Tvrdnja 1: ako točka  $T(x, y)$  pripada hiperboli, njezine koordinate vezane su jednadžbom (78)

- točka  $T$  prema pretpostavci pripada hiperboli pa vrijedi

$$|d(F_1, T) - d(F_2, T)| = 2a \quad (79)$$

- koordinate fokusa:  $F_1 = (c, 0)$  i  $F_2 = (-c, 0)$
- udaljenost točke  $T(x, y)$  od fokusa iznosi

$$d(F_1, T) = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \quad \text{i} \quad d(F_2, T) = \sqrt{(x + c)^2 + y^2} \quad (80)$$

- pretpostavimo prvo da vrijedi  $d(F_1, T) > d(F_2, T)$

$$d(F_1, T) - d(F_2, T) = 2a \implies \sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a \quad (81)$$

- prebacimo jedan od korijena na drugu stranu jednadžba i kvadriramo je

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \sqrt{(x + c)^2 + y^2} + 2a \quad (82)$$

$$(x - c)^2 + y^2 = (x + c)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + 4a^2 \quad (83)$$

$$x^2 - 2xc + c^2 = x^2 + 2xc + c^2 + 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + 4a^2 \quad (84)$$

$$-4xc - 4a^2 = 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} \quad (85)$$

$$xc + a^2 = a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} \quad (86)$$

$$x^2c^2 + 2a^2xc + a^4 = a^2(x + c)^2 + a^2y^2 \quad (87)$$

$$x^2c^2 + 2a^2xc + a^4 = a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 \quad (88)$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \quad (89)$$

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad (90)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (91)$$

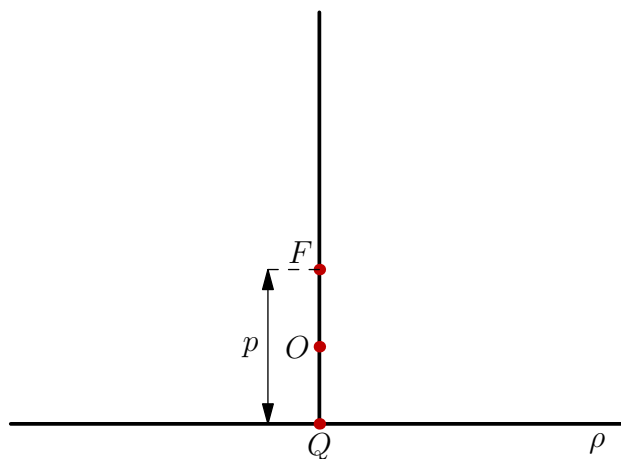
## 3.4 Parabola

### 3.4.1 Definicija parabole

- pretpostavimo da u ravnini leže točka  $F$  i pravac  $p$
- skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od točke  $F$  i pravca  $p$  zovemo parabola

### 3.4.2 Konstrukcija parabole

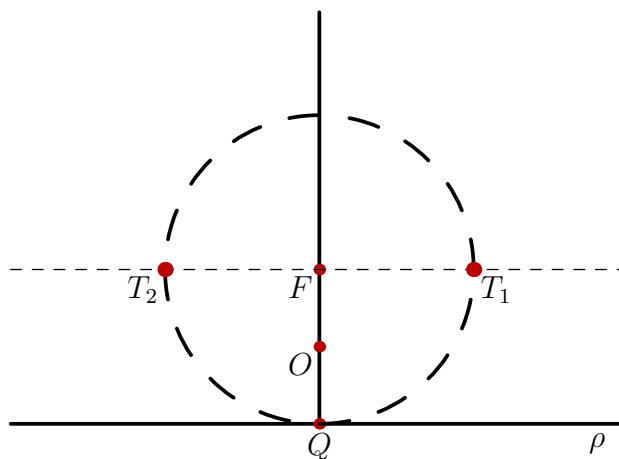
- želimo konstruirati parabolu kojoj su zadani fokus  $F$  i direktrisa  $\rho$
- pritom udaljenost fokusa od direktrise iznosi  $p$
- prvi korak je da povučemo okomicu na direktrisu  $\rho$  koja prolazi kroz fokus  $F$



Slika 26: Prvi korak konstrukcije parabole

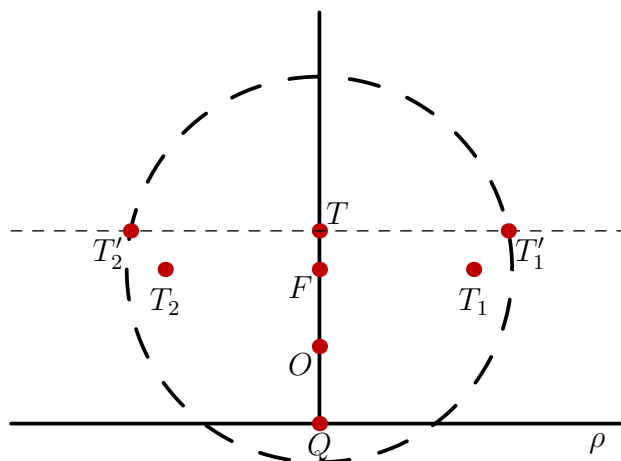
- točka  $O$  koja se nalazi na polovištu dužine  $\overline{FQ}$  jednako je udaljena od fokusa i direktrise (za  $p/2$ ) pa se sigurno nalazi na paraboli
- u drugom koraku kroz fokus povučemo paralelu s direktrisom (označimo je s  $t$ ) i nacrtamo kružnicu radijusa  $p$  sa središtem u fokusu  $F$
- kružnica siječe pravac  $t$  u točkama  $T_1$  i  $T_2$
- obje točke su udaljene za  $p$  od fokusa jer se nalaze na kružnici
- istovremeno su obje udaljene za  $p$  od direktrise jer se nalaze na pravcu  $t$

- stoga obje točke pripadaju paraboli



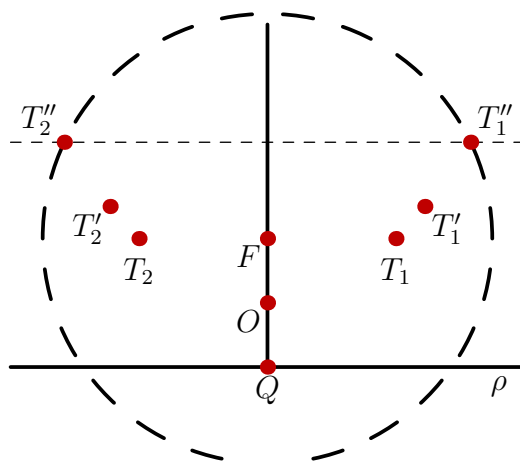
Slika 27: Drugi korak konstrukcije parabole

- treći korak konstrukcije parabole započinjemo odabirom proizvoljne točke  $T$  koja je smještena na okomici, ali iznad fokusa
- kroz točku  $T$  provučemo paralelu s direktrisom (označimo je s  $t$ ) i nacrtamo kružnicu radijusa  $d(T, Q)$
- kružnica siječe pravac  $t$  u točkama  $T'_1$  i  $T'_2$
- točke  $T'_1$  i  $T'_2$  su udaljene za  $d(T, Q)$  od fokusa jer se nalaze na kružnici
- istovremeno su udaljene za  $d(T, Q)$  od direktrise jer se nalaze na pravcu  $t$
- zaključujemo da se i točke  $T'_1$  i  $T'_2$  nalaze na paraboli



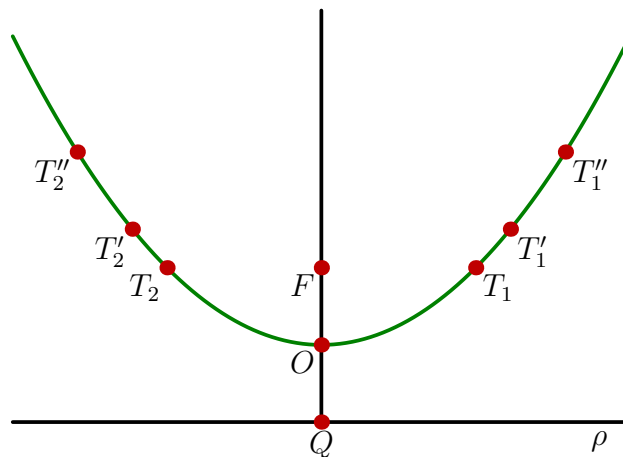
Slika 28: Treći korak konstrukcije parabole

- ako postupak ponovimo s drugačijim odabirom točke  $T$  dolazimo do još dvije točke parabole



Slika 29: Četvrti korak konstrukcije parabole

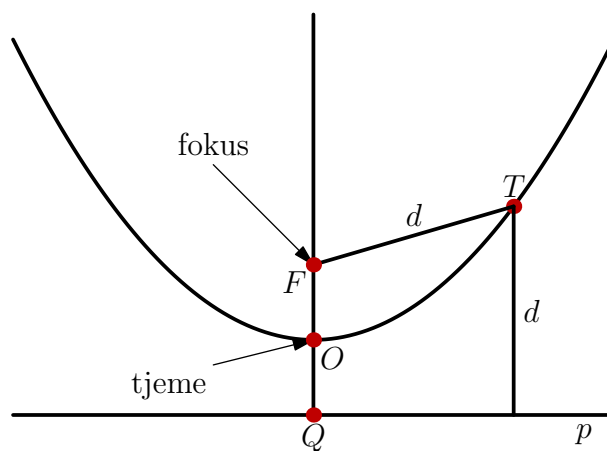
- na kraju točke spojimo u parabolu



Slika 30: Dovršetak konstrukcije parabole

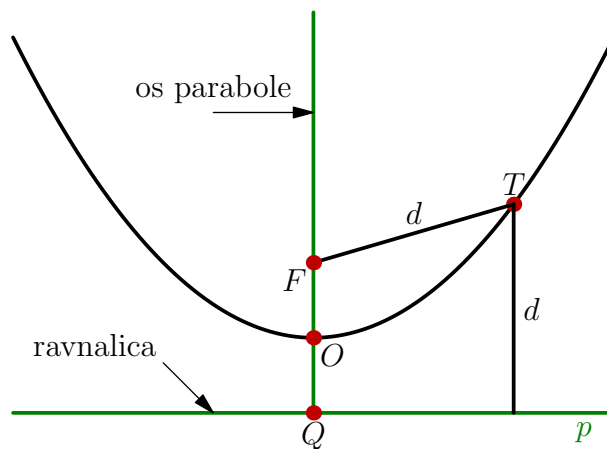
### 3.4.3 Elementi parabole

- fokus i tjeme parabole
- fokus je točka iz definicije parabole: sve točke koje leže na paraboli su jednako udaljene od fokusa i ravnalice ili direktrise
- tjeme je točka koja je najbliže fokusu, a time i ravnalici



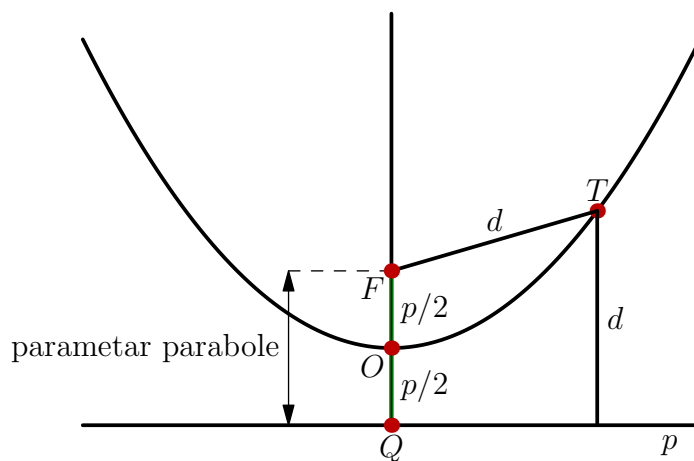
Slika 31: Fokus i tjeme parabole.

- os parabole: pravac koji dijeli parabolu na dva jednaka dijela
- ravnalica ili direktrisa: sve točke koje leže na paraboli su jednako udaljene od fokusa i ravnalice ili direktrise



Slika 32: Fokus i tjeme parabole.

- parametar parabole: udaljenos fokusa od ravnalice (direktrise)
- parametar parabole obično označavamo s  $p$
- odmah slijedi da je udaljenost fokusa od tjemena  $p/2$ , kao i udaljenost tjemena od ravnalice

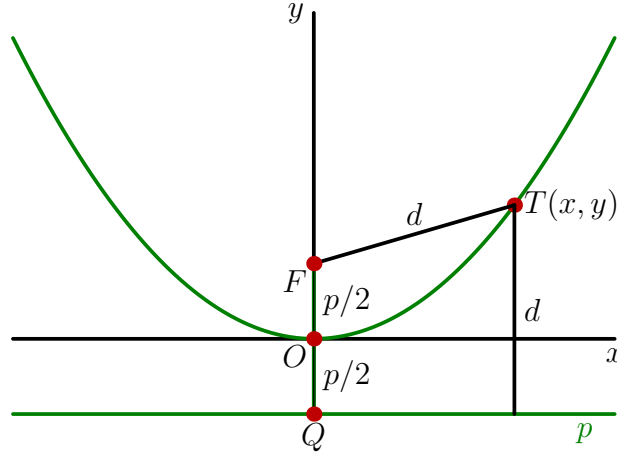


Slika 33: Parametar parabole.

### 3.4.4 Jednadžba parabole

- ako je ishodište koordinatnog sustava u tjemenu parabole, a os parabole leži na osi  $y$ , parabola ima jednadžbu oblika

$$y = \frac{1}{2p}x^2 \quad (92)$$



Slika 34: Izvod jednadžbe parabole.

- trebamo dokazati dvije tvrdnje

Tvrdnja 1: ako točka  $T(x, y)$  pripada paraboli tj. ako je njena udaljenost od fokusa  $F$  jednaka udaljenosti od direktrise  $p$ , za koordinate točke vrijedi

$$y = \frac{1}{2p}x^2 \quad (93)$$

- točka  $T(x, y)$  prema pretpostavci pripada paraboli pa je udaljenost točke od fokusa jednaka udaljenosti točke od direktrise

$$d(F, T) = d(\rho, T) \quad (94)$$

- ishodište sustava se nalazi u tjemenu parabole pa jednadžba direktrise glasi

$$y = -\frac{p}{2}, \quad (95)$$

dok su koordinate fokusa

$$F \equiv \left(0, \frac{p}{2}\right) \quad (96)$$

- udaljenost točke  $T(x, y)$  od direktrise

$$d(\rho, T) = \left|y + \frac{p}{2}\right| \quad (97)$$

- udaljenost točke  $T(x, y)$  od fokusa

$$d(F, T) = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} \quad (98)$$

- uvjet (94) svodi se na

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \left|y + \frac{p}{2}\right| \quad (99)$$

- kvadriramo prethodnu jednadžbu

$$x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2 \quad (100)$$

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4} \quad (101)$$

$$x^2 = 2py \quad (102)$$

- koordinate točke  $T(x, y)$  zaista su vezane relacijom

$$y = \frac{1}{2p}x^2 \quad (103)$$

Tvrdnja 2: ako za točku  $T(x, y)$  vrijedi

$$y = \frac{1}{2p}x^2 \quad (104)$$

onda je točka  $T$  element parabole

- udaljenost točke od fokusa (vidi sliku 34) iznosi

$$d_1^2 = x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 \quad (105)$$

- uvrstimo vezu između  $x$  i  $y$  (104) i kvadriramo izraz u zagradi

$$d_1^2 = 2py + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2 \quad (106)$$

- udaljenost točke  $T$  od ravnalice (vidi sliku 34) iznosi

$$d_2 = y + \frac{p}{2} \quad (107)$$

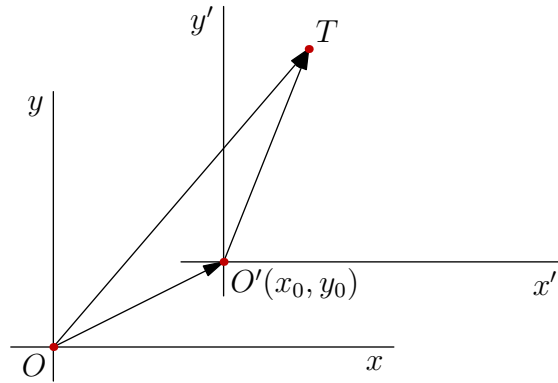
- udaljenosti  $d_1$  i  $d_2$  su jednake
- točka  $T$  je jednako udaljena od fokusa i ravnalice pa se nalazi na paraboli

## 4 Transformacije koordinatnog sustava

### 4.1 Translacija koordinatnog sustava

- pretpostavimo da u ravнинi leže koordinatni sustavi  $S$  i  $S'$
- položaj ishodišta sustava  $S'$  u sustavu  $S$  određen je vektorom

$$\overrightarrow{OO'} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} \quad (108)$$



Slika 35: Translacija koordinatnog sustava.

- položaj točke  $T$  u sustavu  $S$  određen je vektorom

$$\overrightarrow{OT} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad (109)$$

- položaj iste točke u sustavu  $S'$  određen je vektorom

$$\overrightarrow{OT'} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' \quad (110)$$

- za svaku točku  $T$  vrijedi

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OT'} \quad (111)$$

- uvrstimo jednadžbe (108), (109) i (110) u prethodni izraz

$$x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + x_0\vec{i} + y_0\vec{j} \quad (112)$$

- jedinični vektori su linearno nezavisni pa možemo izjednačiti izraze uz  $\vec{i}$  i  $\vec{j}$

$$x = x' + x_0 \quad \text{ i } \quad y = y' + y_0 \quad (113)$$

- našli smo formule za transformacije koordinata pri translaciji koordinatnog sustava

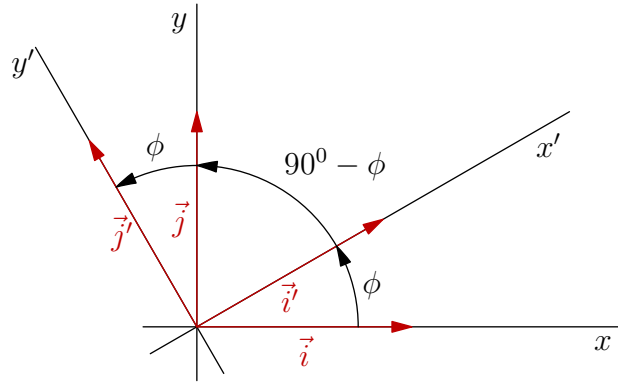
$$x' = x - x_0 \quad \text{i} \quad y' = y - y_0 \quad (114)$$

$$x = x' - x_0 \quad \text{i} \quad y = y' - y_0 \quad (115)$$

- formule (114) i (115) omogućuju povezivanje koordinata točke  $T$  u novom ( $S'$ ) i starom sustavu ( $S$ )

## 4.2 Rotacija koordinatnog sustava

- pretpostavimo da koordinatni sustavi  $S$  i  $S'$  leže u istoj ravnini, imaju zajedničko ishodište i da kut između osi  $x$  i  $x'$  (tj.  $y$  i  $y'$ ) iznosi  $\phi$



Slika 36: Rotacija koordinatnog sustava u ravnini.

- točka  $T$  ima koordinate  $(x, y)$  u sustavu  $S$ , dok su njene koordinate u sustavu  $S'$   $(x', y')$
- želimo povezati koordinate u sustavima  $S$  i  $S'$
- skalarni produkt jediničnih vektora u sustavima  $S$  i  $S'$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \cos \phi \quad (116)$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = \cos \phi \quad (117)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \cos (90^\circ + \phi) = -\sin \phi \quad (118)$$

$$\vec{j} \cdot \vec{i} = \cos (90^\circ - \phi) = \sin \phi \quad (119)$$

- za općeniti vektor  $\vec{a}$  vrijedi

$$\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{a} \cdot \vec{j})\vec{j} \quad (120)$$

- primjenimo prethodnu formulu na jedinične vektore  $\vec{i}$  i  $\vec{j}'$

$$\vec{i} = (\vec{i} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{i} \cdot \vec{j})\vec{j} = \cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j} \quad (121)$$

$$\vec{j}' = (\vec{j}' \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{j}' \cdot \vec{j})\vec{j} = -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j} \quad (122)$$

- točki  $T$  u sustavu  $S$  pridružene su koordinate  $(x, y)$ , a točki  $T'$  koordinate  $(x', y')$
- vektor s hvatištem u ishodištu i krajem u točki  $T$  možemo napisati u oba sustava

$$\overrightarrow{OT} = x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' \quad (123)$$

- pomnožimo jednadžbu (123) s jediničnim vektorom  $\vec{i}$

$$x' = x\vec{i} \cdot \vec{i} + y\vec{j} \cdot \vec{i} = x \cos \phi + y \sin \phi \quad (124)$$

- pomnožimo jednadžbu (123) s jediničnim vektorom  $\vec{j}'$

$$y' = x\vec{i} \cdot \vec{j}' + y\vec{j} \cdot \vec{j}' = -x \sin \phi + y \cos \phi \quad (125)$$

- jednadžbe transformacije

$$x' = x \cos \phi + y \sin \phi \quad (126)$$

$$y' = -x \sin \phi + y \cos \phi \quad (127)$$

možemo invertirati

$$x = x' \cos \phi - y' \sin \phi \quad (128)$$

$$y = x' \sin \phi + y' \cos \phi \quad (129)$$

## 5 Zadaci za vježbu

Zadatak 1:

Neka sustav  $S'$  nastaje iz sustava  $S$  translacijom ishodišta za vektor  $2\vec{i} + \vec{j}$  i onda rotacijom za kut  $\phi = 60^\circ$ . U sustavu  $S'$  nađi jednadžbu pravca

$$x + 2y + 3 = 0.$$

Rješenje:  $(2\sqrt{3} + 1)x' + (2 - \sqrt{3})y' + 14 = 0$

Zadatak 2:

Neka sustav  $S'$  nastaje iz sustava  $S$  translacijom ishodišta za vektor  $2\vec{i} + \vec{j}$  i onda rotacijom za kut  $\phi = 60^\circ$ . U sustavu  $S'$  nađi jednadžbu kružnice

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2.$$

Rješenje:

$$\left(x' + \frac{4\sqrt{3} + 1}{2}\right)^2 + \left(y' + \frac{4 - \sqrt{3}}{2}\right)^2 = 4$$

Zadatak 3:

Neka sustav  $S'$  nastaje iz sustava  $S$  translacijom ishodišta za vektor  $2\vec{i} + \vec{j}$  i onda rotacijom za kut  $\phi = 60^\circ$ . U sustavu  $S'$  nađi jednadžbu elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Zadatak 4:

Neka sustav  $S'$  nastaje iz sustava  $S$  translacijom ishodišta za vektor  $2\vec{i} + \vec{j}$  i onda rotacijom za kut  $\phi = 60^\circ$ . U sustavu  $S'$  nađi jednadžbu hiperbole

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Zadatak 5:

Neka sustav  $S'$  nastaje iz sustava  $S$  translacijom ishodišta za vektor  $2\vec{i} + \vec{j}$  i onda rotacijom za kut  $\phi = 60^\circ$ . U sustavu  $S'$  nađi jednadžbu parabole

$$y = 2x^2.$$

# Funkcije

September 15, 2008

## 1 Definicija funkcije

- promatramo realne funkcije realne varijable
- za definiciju funkcije potrebna su nam dva podskupa skupa realnih brojeva
- označimo ih s  $A$  i  $B$
- zadati funkciju znači zadati pravilo koje svakom elementu skupa  $A$  pridružuje jedan element skupa  $B$
- takvu funkciju obično označavamo s

$$f : A \rightarrow B, f(a) = b \tag{1}$$

- skup  $A$  zovemo područje definicije funkcije  $f$
- da bi zadali funkcije, moramo zadati
  - skup  $A$  s kojeg preslikavamo elemente
  - skup  $B$  na koji preslikavamo elemente
  - pravilo kojim bilo kojem elementu skupa  $A$  pridružujemo element skupa  $B$

Primjer: kvadrat realnog broja

- želimo napisati funkciju koja će svakom realnom broju pridružiti njegov kvadrat
- funkcija je definirana za svaki realni broj pa je skup s kojeg preslikavamo elemente (tj. skup  $A$  ili područje definicije) cijeli skup realnih brojeva

- kvadriranjem realnih brojeva možemo dobiti samo pozitivne brojeve i nulu pa se skup  $B$  sastoji od pozitivnih realnih brojeva i nule
- konačno, moramo formulom zapisati pravilo preslikavanja
- potrebni su nam ime argumenta i ime funkcije
- uobičajen izbor za ime argumenta je  $x$ , ali možemo odabrati i bilo koje drugo slovo (npr.  $s, t, u, \dots$ )
- najčešći izbor za ime funkcije je  $f$ , ali možemo koristiti i  $g, h, \dots$
- ako smo imena argumenta funkcije izabrali kao  $x$  i  $f$ , pravilo preslikavanja glasi

$$f(x) = x^2, \quad x \in \mathcal{R} \quad (2)$$

- da smo za ime argumenta odbrali  $t$ , a za ime funkcije  $g$  istu funkciju bi zapisali kao

$$g(t) = t^2, \quad t \in \mathcal{R} \quad (3)$$

## 1.1 Prirodno područje definicije

- ako područje definicije nije navedeno, onda podrazumjevamo prirodno područje definicije tj. skup svih realnih brojeva na kojima je funkcija definirana

Primjer:

- promotrimo funkciju zadanu formulom

$$f(x) = \frac{5x}{x-2} \quad (4)$$

- odmah možemo uočiti točku  $x = 2$  za koju funkcija nije definirana jer nije dozvoljeno dijeliti s nulom
- dakle, prirodno područje definicije ove funkcije je skup realnih brojeva bez broja 2

$$A = \mathcal{R} \setminus \{2\} \quad (5)$$

Primjer:

- promotrimo funkciju zadanu formulom

$$f(x) = \sqrt{x-3} \quad (6)$$

- funkcija nije definirana ako je  $x - 3 < 0$  jer korijen negativnog broja ne pripada skupu realnih, nego kompleksnih brojeva
- prirodno područje definicije ove funkcije je skup

$$A = \{x \in \mathcal{R}; \quad x \geq 3\} \quad (7)$$

## 1.2 Jednakost funkcija

- da bi dvije funkcije

$$f : A \rightarrow B \quad \text{ i } \quad g : C \rightarrow D \quad (8)$$

bile jednake moraju biti ispunjena tri uvjeta

- područja definicija moraju biti jednaka:  $A = C$
- skupovi na koje preslikavamo elemente moraju biti jednaki:  $B = D$
- vrijednosti funkcije moraju biti jednake za svaki argument  $x$  iz područja definicije funkcije

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in A = C \quad (9)$$

Primjer:

- promotrimo funkcije

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \text{ i } \quad g(x) = x + 2 \quad (10)$$

- funkciju  $f$  možemo napisati u obliku

$$f(x) = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} \quad (11)$$

- funkcije  $f$  i  $g$  očito imaju iste vrijednosti, osim u slučaju  $x = 2$  jer u toj točki funkcija  $f$  nije definirana
- područja definicije ove dvije funkcije nisu jednaka, pa ni same funkcije nisu jednake

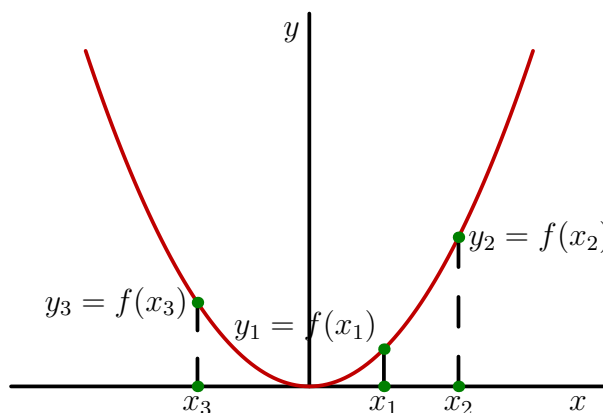
$$f \neq g \quad (12)$$

### 1.3 Graf funkcije

- grafom funkcije  $f$  zovemo skup točaka u ravnini za koje vrijedi

$$G = \{(x, y) : y = f(x)\} \quad (13)$$

Primjer: graf funkcije  $f(x) = x^2$

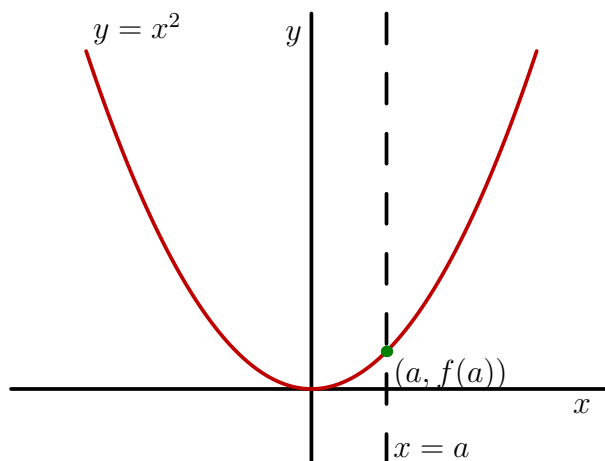


Slika 1: Graf funkcije  $f(x) = x^2$ .

- da bi neki skup točaka u ravnini bio graf funkcije, svakoj vrijednosti  $x$  mora pripadati najviše jedna vrijednost  $y$
- to znači da pravac  $x = a$  koji siječe skup točaka, to čini u točno jednoj točki

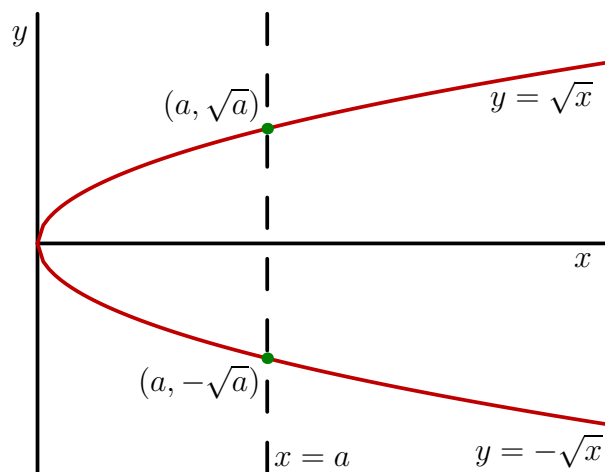
$$T = (a, f(a)) \quad (14)$$

- skup točaka na slici je graf funkcije jer svaki pravac  $x = a$  siječe skup u točno jednoj točki



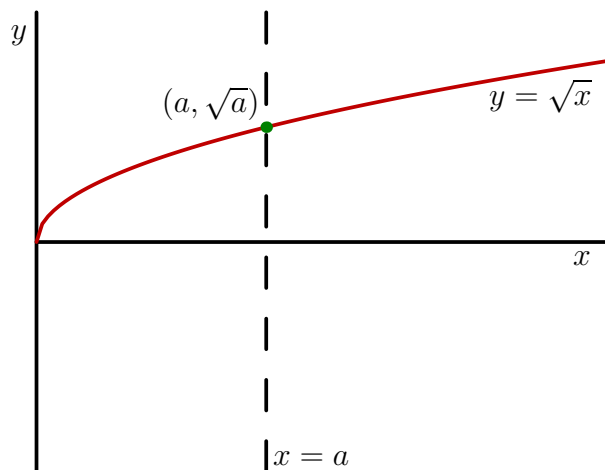
Slika 2: Skup točaka  $\{(x, x^2)\}$  predstavlja graf funkcije  $f(x) = x^2$ .

- sljedeći skup točaka nije graf funkcije jer pravac  $x = a$ ,  $a > 0$  siječe skup u dvije točke

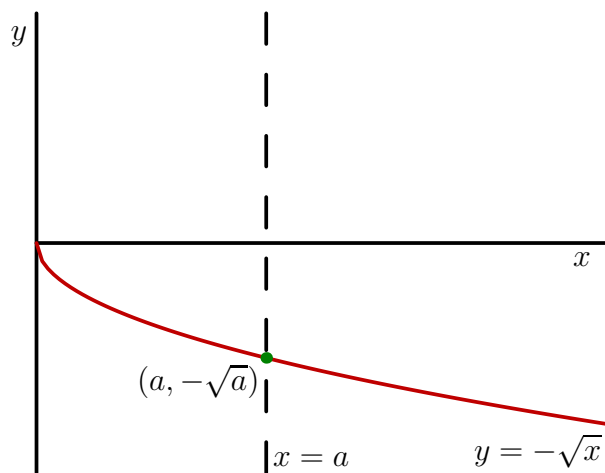


Slika 3: Skup točaka  $\{(x, \pm\sqrt{x})\}$ .

- ako u prethodnom slučaju skup ograničimo samo na pozitivne vrijednosti  $y = \sqrt{x}$  dolazimo do grafa funkcije  $f(x) = +\sqrt{x}$

Slika 4: Skup točaka  $\{(x, +\sqrt{x})\}$ .

- ako skup ograničimo samo na negativne vrijednosti  $y = -\sqrt{x}$  dolazimo do grafa funkcije  $f(x) = -\sqrt{x}$

Slika 5: Skup točaka  $\{(x, -\sqrt{x})\}$ .

## 1.4 Monotone funkcije

- neka je zadana funkcija  $f : A \rightarrow \mathcal{R}$ ,  $A \subseteq \mathcal{R}$  i interval  $[a, b]$
- za funkciju  $f$  kažemo da monotonno raste na intervalu  $[a, b]$  ako vrijedi

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2) \quad (15)$$

- za funkciju  $f$  kažemo da monotono pada na intervalu  $[a, b]$  ako vrijedi

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2) \quad (16)$$

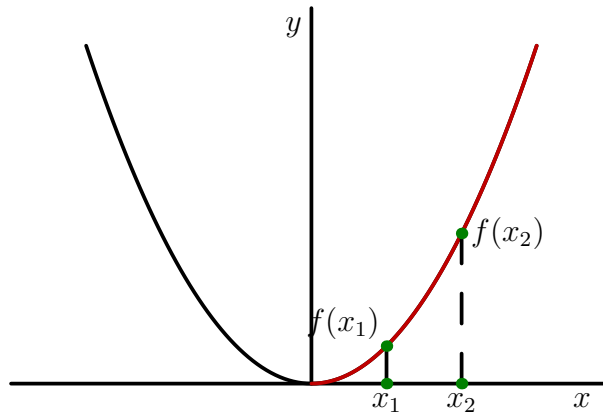
- za funkciju  $f$  kažemo da strogo raste na intervalu  $[a, b]$  ako vrijedi

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) \quad (17)$$

- za funkciju  $f$  kažemo da strogo pada na intervalu  $[a, b]$  ako vrijedi

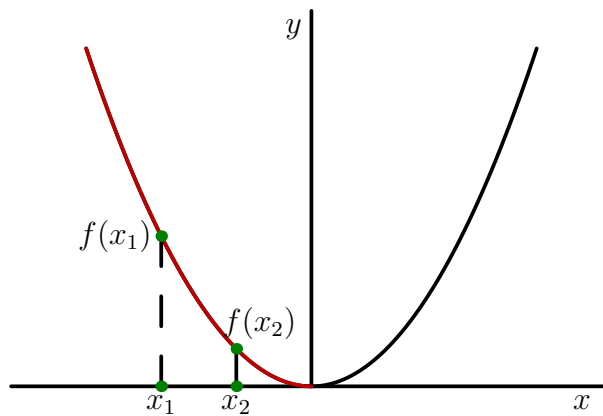
$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2) \quad (18)$$

Primjer: funkcija  $f(x) = x^2$  strogo raste na intervalu  $[0, \infty)$



Slika 6: Funkcija  $f(x) = x^2$  strogo raste na intervalu  $[0, \infty)$ .

Primjer: funkcija  $f(x) = x^2$  strogo pada na intervalu  $\langle -\infty, 0]$



Slika 7: Funkcija  $f(x) = x^2$  strogo pada na intervalu  $\langle -\infty, 0]$ .

Primjedbe:

- interval  $[a, b]$  uključuje oba kraja  $a$  i  $b$  (dvije uglate zagrade)
- interval  $[a, b)$  uključuje samo točku  $a$ , ali ne i točku  $b$  (jedna uglasta zagrada)
- interval  $\langle a, b]$  uključuje samo točku  $b$ , ali ne i točku  $a$  (jedna uglasta zagrada)
- interval  $\langle a, b)$  ne uključuje ni točku  $a$ , ni točku  $b$

## 1.5 Parne i neparne funkcija

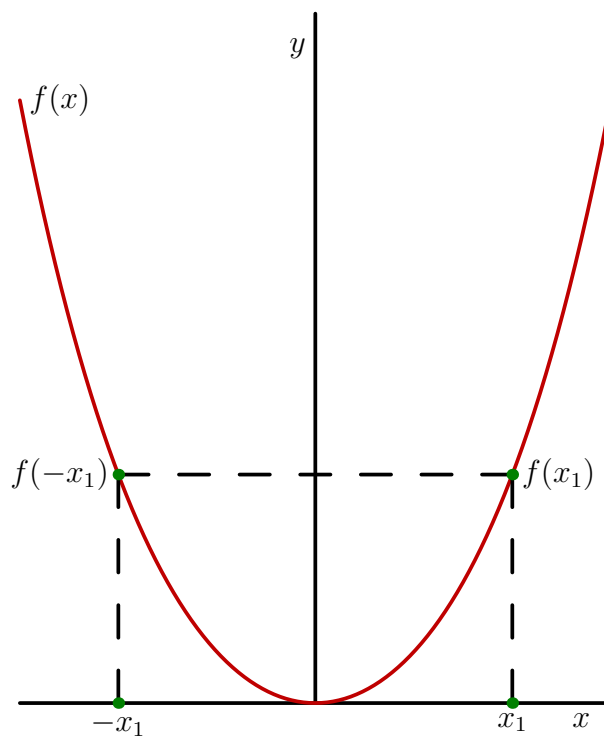
- neka je funkcija  $f$  zadana na simetričnom skupu  $D \subseteq \mathcal{R}$
- za simetrični skup vrijedi

$$x \in D \implies -x \in D \quad (19)$$

- funkcija  $f$  je parna ako vrijedi

$$f(-x) = f(x) \quad (20)$$

- graf parne funkcije je simetričan u odnosu na os  $y$

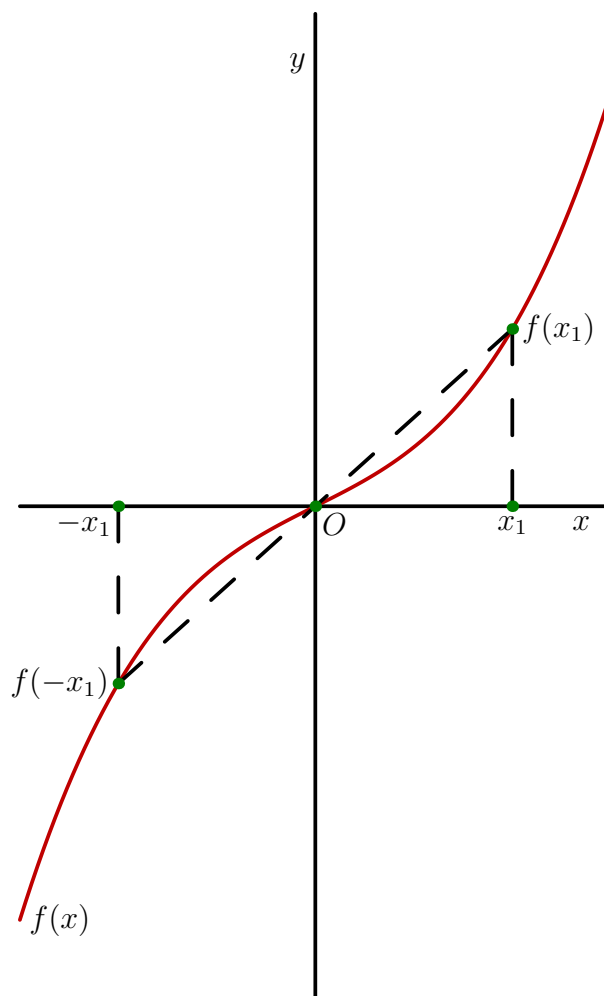


Slika 8: Graf parne funkcije simetričan je u odnosu na os  $y$ .

- funkcija  $f$  je neparna ako vrijedi

$$f(-x) = -f(x) \quad (21)$$

- graf neparne funkcije je simetričan u odnosu na ishodište



Slika 9: Graf neparne funkcije simetričan je u odnosu na ishodište.

## 2 Operacije s funkcijama

### 2.1 Algebarske operacije

- pretpostavimo da funkcije  $f$  i  $g$  preslikavaju podskup skupa realnih brojeva  $A$  na skup realnih brojeva  $\mathcal{R}$

- definiramo sljedeće funkcije
  - zbroj funkcija  $f$  i  $g$ :  $f + g$
  - razliku funkcija  $f$  i  $g$ :  $f - g$
  - umnožak realnog broja  $c$  i funkcije  $f$ :  $cf$
  - umnožak funkcija:  $f \cdot g$
  - kvocijent funkcija:  $\frac{f}{g}$
- područje definicije svih tih funkcija jednak je području definicije funkcija  $f$  i  $g$  (dakle skup  $A$ ), osim u slučaju kvocijenta funkcija
- tada iz područja definicije moramo isključiti nultočke funkcije  $g$  jer ne smijemo dijeliti s nulom
- algebarskim operacijama djelujemo na vrijednosti funkcija
  - zbroj funkcija:  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
  - razlika funkcija:  $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
  - umnožak realnog broja  $c$  i funkcije  $f$ :  $(cf)(x) = c \cdot f(x)$
  - umnožak funkcija:  $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$
  - kvocijent funkcija:  $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Primjer: zbrajanje, oduzimanjem množenje i dijeljenje funkcija

- neka su zadane funkcije

$$f(x) = x^2 \quad \text{i} \quad g(x) = \frac{\sin x}{1 + x^2} \quad (22)$$

- funkcije zbrajamo tako da zbrojimo vrijednosti funkcija

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + \frac{\sin x}{1 + x^2} \quad (23)$$

- funkcije oduzimamo tako da oduzmemo vrijednosti funkcija

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - \frac{\sin x}{1 + x^2} \quad (24)$$

- funkcije množimo tako da pomnožimo vrijednosti argumenata

$$(f \cdot g) = f(x)g(x) = \frac{x^2 \sin x}{1 + x^2} \quad (25)$$

- funkcije dijelimo tako da podijelimo vrijednosti argumenata pritom pazeći da iz područja definicije konačne funkcije izbacimo nultočke nazivnika

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2(1 + x^2)}{\sin x}, \text{ gdje } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (26)$$

- nultočke funkcije  $\sin x$  koje moramo eliminirati iz područja definicije funkcije  $(f/g)(x)$

$$x_0 = k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (27)$$

Primjer: množenje funkcije realnim brojem

- neka je zadana funkcija  $f(x) = \sin x$  i realni broj  $c = 3$
- funkciju množimo realnim brojem tako da njezinu vrijednost pomnožimo tim brojem

$$(cf)(x) = cf(x) = 3 \sin x \quad (28)$$

## 2.2 Kompozicija funkcija

- zadane su dvije funkcije

$$f: A \rightarrow \mathcal{R} \quad \text{ i } \quad g: B \rightarrow \mathcal{R} \quad (29)$$

- područja definicije obje funkcije su podskupovi skupa realnih brojeva

$$A, B \subseteq \mathcal{R} \quad (30)$$

- da bi objasnili što je kompozicija funkcija, trebamo uvesti pojam slike funkcije
- slika funkcije  $f$  je skup

$$f(A) = \{y \in \mathcal{R} : y = f(x) \text{ za neki } x \in A\} \quad (31)$$

- pretpostavimo da je slika funkcije  $f$  podskup skupa  $B$

$$f(A) \subseteq B \quad (32)$$

- definiramo funkciju  $h : A \rightarrow \mathcal{R}$  koja djeluje na element  $x \in A$  na sljedeći način

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (33)$$

- funkciju  $h = f \circ g$  zovemo kompozicija funkcije  $f$  i  $g$

### Primjer

- neka su zadane funkcije

$$f(x) = x^2 \quad \text{i} \quad g(x) = \sin x \quad (34)$$

- želimo naći kompoziciju funkcija  $g \circ f$
- funkcija  $f$  preslika broj  $x$  u broj  $x^2$
- zatim funkcija  $g$  preslik broj  $x^2$  u broj  $\sin x^2$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sin x^2 \quad (35)$$

## 2.3 Inverzna funkcija

- da bi postojala inverzna funkcija od funkcije  $f : A \rightarrow B$  nužne su dvije pretpostavke
  - funkcije  $f$  preslikava različite elemente skupa  $A$  u različite elemente skupa  $B$
  - svaki element skupa  $B$  je slika nekog elementa skupa  $A$
- u tom slučaju možemo definirati funkciju  $g : B \rightarrow A$  tako da vrijedi

$$f(g(y)) = y \quad \forall y \in B \quad (36)$$

$$g(f(x)) = x \quad \forall x \in A \quad (37)$$

- ako za funkciju  $f$  postoji takva funkcija  $g$ , tada je njihova kompozicija identitet tj. funkcija koja preslikava svaki element u samog sebe

$$(f \circ g) = \mathbf{1}_B \quad \text{i} \quad (g \circ f) = \mathbf{1}_A \quad (38)$$

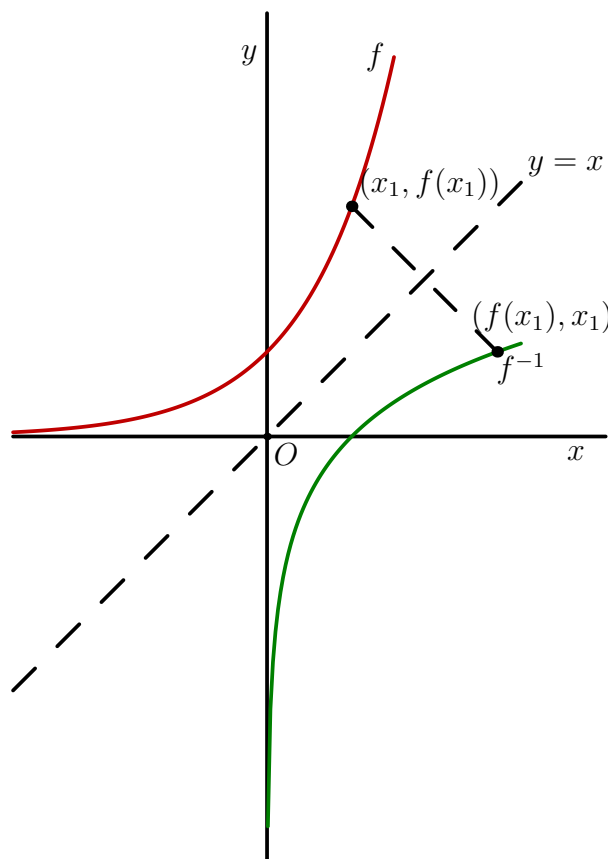
- zato funkciju  $g$  zovemo inverzna funkcija i koristimo oznaku  $f^{-1}$

$$(f \circ f^{-1}) = \mathbf{1}_B \quad \text{i} \quad (f^{-1} \circ f) = \mathbf{1}_A \quad (39)$$

- graf inverzne funkcije  $f^{-1}$  je zrcalna slika grafa funkcije  $f$  u odnosu na pravac  $y = x$
- ako je točka  $(x, y)$  element grafa funkcije  $f(x)$

$$y = f(x) \implies x = f^{-1}(y), \quad (40)$$

pa je točka  $(y, x)$  element grafa funkcije  $f^{-1}$



Slika 10: Graf funkcije  $f$  i pripadne inverzne funkcije  $f^{-1}$

Primjer: inverz funkcije  $f(x) = 2x - 1$

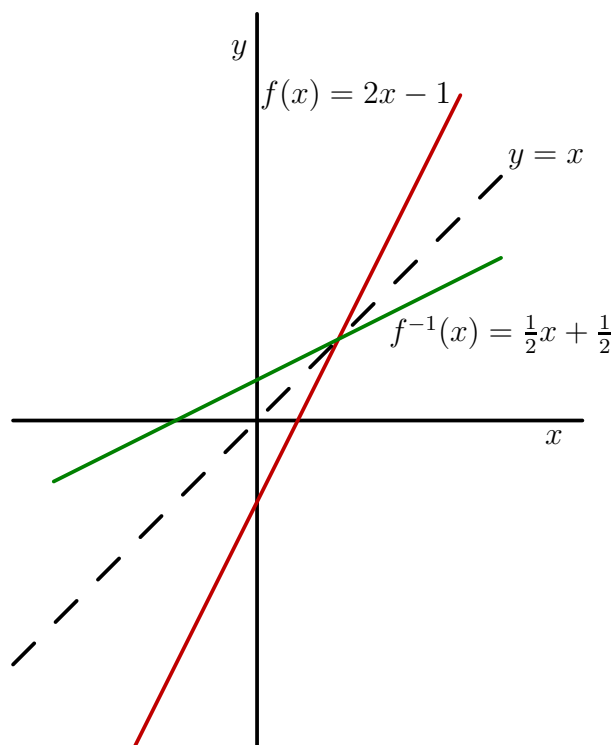
- područje definicije ove funkcije je cijeli skup realnih brojeva
- slika funkcije je također cijeli skup realnih brojeva
- za ovu funkciju je ispunjena i druga pretpostavka postojanja inverzne funkcije

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2) \quad (41)$$

- sve pretpostavke postojanja inverzne funkcije su ispunjene

$$f(x) = 2x - 1 \implies y = 2x - 1 \implies x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \quad (42)$$

$$\implies f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (43)$$



Slika 11: Graf funkcije  $f(x) = 2x - 1$  i pripadne inverzne funkcije  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Primjer: inverz funkcije  $f(x) = x^2$

- područje definicije ove funkcije je cijeli skup realnih brojeva
- slika funkcije je podskup skupa realnih brojeva

$$f(\mathcal{R}) = \{x \in \mathcal{R} : x \geq 0\} \quad (44)$$

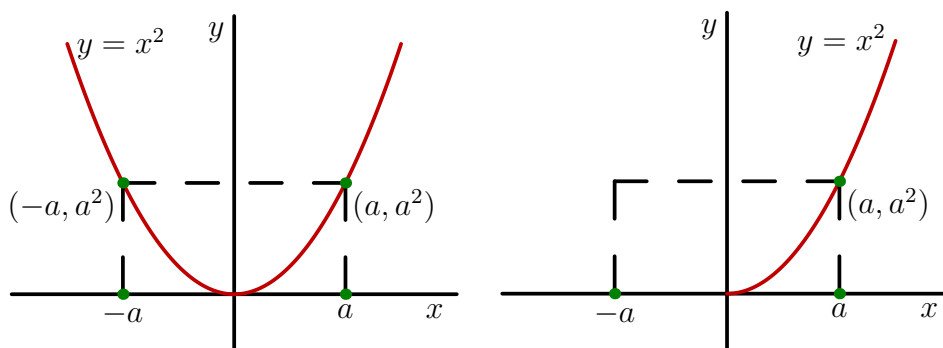
koji sadrži samo pozitivne realne brojeve i nulu

- svaki element slike funkcije  $f(\mathcal{R})$  je slika nekog elementa područja definicije  $\mathcal{R}$

- druga pretpostavka postojanja inverzne funkcije nije ispunjena jer se različiti elementi područja definicije mogu preslikati u isti element slike funkcije, npr.  $f(-3) = f(3)$
- ovako definirana funkcija  $f(x) = x^2$  nema inverznu funkciju
- ograničimo sada područje definicije na realne brojeve  $x \geq 0$

$$f : \{x \in \mathcal{R} : x \geq 0\} \rightarrow \{x \in \mathcal{R} : x \geq 0\} \quad (45)$$

- ograničavanjem područja definicije, uklonili smo problem



Slika 12: Graf funkcije  $f(x) = x^2$  s cijelim skupom realnih brojeva kao područjem definicije (lijevo) i sa ograničenim područjem definicije  $\{x \in \mathcal{R}, x \geq 0\}$  (desno).

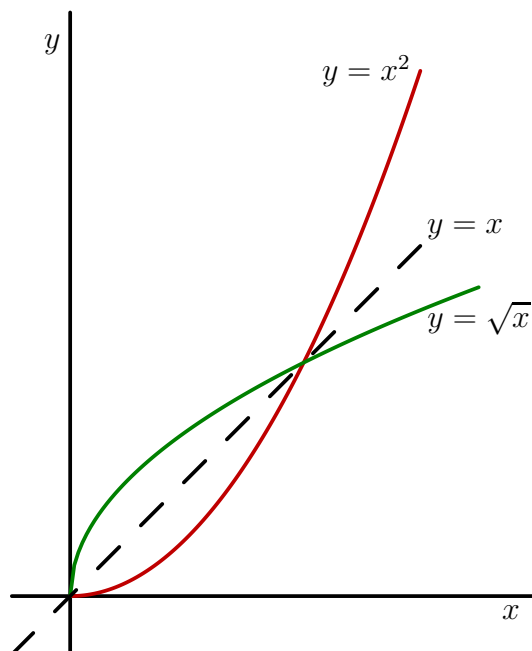
- za funkciju

$$f : \{x \in \mathcal{R} : x \geq 0\} \rightarrow \{x \in \mathcal{R} : x \geq 0\}, \quad f(x) = x^2 \quad (46)$$

bez problema možemo naći inverz

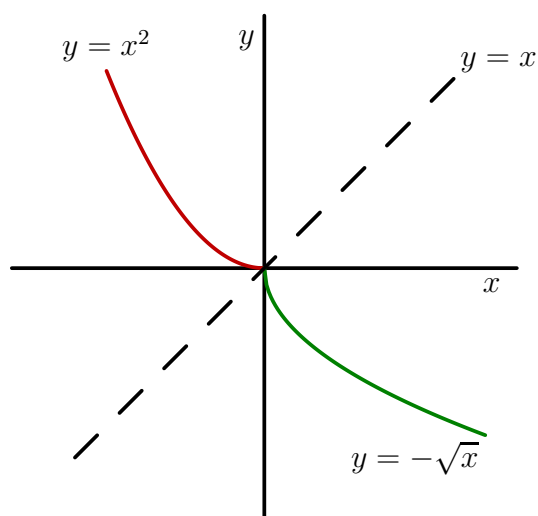
$$y = x^2 \implies x = +\sqrt{y} \quad (47)$$

- izabrali smo pozitivan predznak jer smo područje definicije ograničili na  $x \geq 0$



Slika 13: Funkcija  $f(x) = x^2$  s područjem definicije  $\{\mathcal{R} : x \geq 0\}$  i njezina inverzna funkcija  $f^{-1} = \sqrt{x}$

- da smo napravili ograničenje  $x \leq 0$  izabrali bi negativan predznak



Slika 14: Funkcija  $f(x) = x^2$  s područjem definicije  $\{\mathcal{R} : x \leq 0\}$  i njezina inverzna funkcija  $f^{-1} = -\sqrt{x}$

### 3 Elementarne funkcije

- u primjenama matematičke analize često susrećemo pojam elementarnih funkcija
- osnovne elementarne funkcije obuhvaćaju
  - polinomi
  - racionalne funkcije
  - eksponencijalne funkcije
  - logaritamske funkcije
  - opća potencija
  - trigonometrijske funkcije
  - ciklometrijske funkcije
- sve složene elementarne funkcije možemo dobiti iz osnovnih elementarnih funkcija primjenom konačnog broja aritmetičkih operacija (zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje) i konačnog broja kompozicija funkcija

Primjer:

- trigonometrijske funkcije i polinomi su osnovne elementarne funkcije

$$f(x) = \sin x \quad \text{i} \quad g(x) = x^2 + 2x - 7 \quad (48)$$

- kompozicija  $g \circ f$  je složena elementarna funkcija

$$g(f(x)) = (\sin x)^2 + 2(\sin x) - 7 = \sin^2 x + 2 \sin x - 7 \quad (49)$$

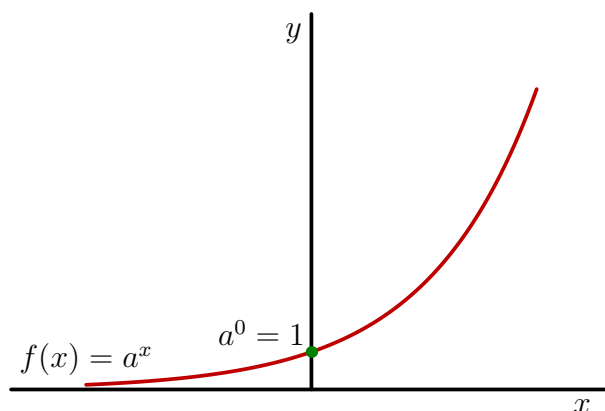
#### 3.1 Eksponencijalne funkcije

- eksponencijalnu funkciju s bazom  $a$  zapisujemo na sljedeći način

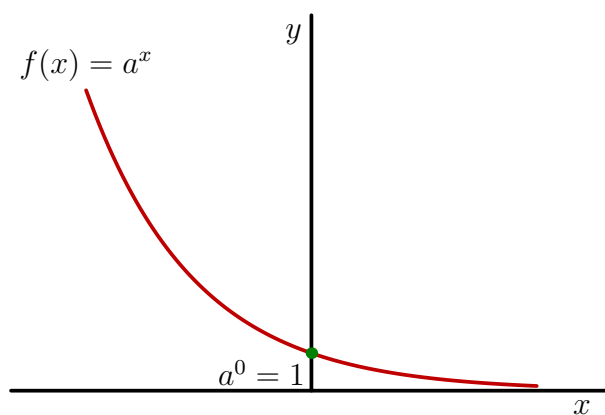
$$f(x) = a^x \quad (a > 0) \quad (50)$$

- navedimo neka svojstva eksponencijalnih funkcija
  - područje definicije eksponencijalne funkcije je cijeli skup realnih brojeva
  - eksponencijalna funkcija poprima samo pozitivne vrijednosti
  - $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$

- $a^{x_1-x_2} = a^{x_1}/a^{x_2}$
- $a^0 = 1$
- $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$
- ako je  $a > 1$  funkcija  $a^x$  je strogo rastuća

Slika 15: Primjer rastuće eksponencijalne funkcije ( $a=2$ ).

- ako je  $a < 1$  funkcija  $a^x$  je strogo padajuća

Slika 16: Primjer padajuće eksponencijalne funkcije ( $a=1/2$ ).

- slučaj  $1^x = 1$  ne smatramo eksponencijalnom funkcijom

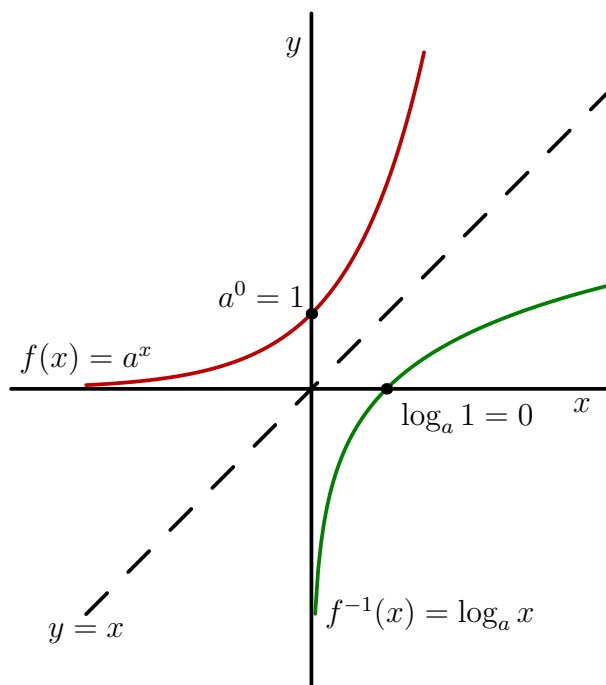
### 3.2 Logaritamska funkcija

- eksponencijalna funkcija  $f(x) = a^x$  zadovoljava uvjete postojanja inverzne funkcije

- za svaki pozitivni broj  $y$  možemo naći realni broj  $x$  tako da vrijedi  $y = a^x$
- ako je  $x_1 \neq x_2$  tada je  $a^{x_1} \neq a^{x_2}$  (pravac  $x = a$  siječe graf eksponencijalne funkcije u samo jednoj točki)
- inverznu funkciju eksponencijalne funkcije zovemo logaritamska funkcija

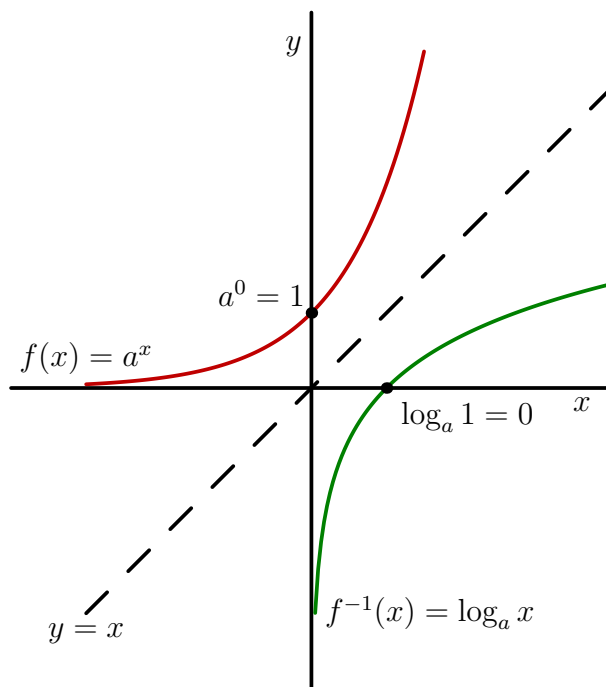
$$y = a^x \implies x = \log_a y \quad (51)$$

- područje definicije logaritamske funkcije je skup pozitivnih realnih brojeva (bez nule)
- logaritamska funkcija poprima vrijednosti na cijelom skupu realnih brojeva
- graf logaritamske funkcije dobijemo zrcaljenjem grafa eksponencijalne funkcije s obzirom na pravac  $y = x$
- logaritamska funkcije strogo raste ako je  $a > 1$



Slika 17: Strogo rastuća logaritamska funkcija.

- logaritamska funkcija strogo pada ako je  $0 < a < 1$



Slika 18: Strogo padajuća logaritamska funkcija.

- uz pretpostavku  $x_1 > 0$  i  $x_2 > 0$  vrijedi

$$\log_a x_1 \cdot x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2 \quad (52)$$

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2 \quad (53)$$

$$\log_a 1 = 0 \quad (54)$$

- možemo izvesti i vezu izmđu logaritama s različitim bazama
- pretpostavimo da vrijedi

$$a^{x_1} = y \implies x_1 = \log_a y \quad (55)$$

$$b^{x_2} = y \implies x_2 = \log_b y \quad (56)$$

- eksponencijalna i logaritamska funkcija su inverzne

$$b^{\log_b a} = a \implies a^x = (b^{\log_b a})^x = b^{x \log_b a} \implies \log_b a^x = x \log_b a \quad (57)$$

- iskoristimo jedn. (55)

$$\log_b a^{x_1} = x_1 \log_b a \implies \log_b y = x_1 \log_b a \quad (58)$$

- sada iskoristimo jedn. (56)

$$\log_b y = x_2 \implies x_2 = x_1 \log_b a \implies x_1 = \frac{1}{\log_b a} x_2 \quad (59)$$

- opet koristimo jedn. (55) i (56)

$$\log_a y = \frac{1}{\log_b a} \log_b y \quad (60)$$

Primjer: veza prirodnih i dekadskih logaritama

- prirodni logaritam kao bazu ima iracionalni broj  $e$

$$e = 2.7182818 \dots \quad (61)$$

- za prirodni logaritam koristimo i posebnu oznaku

$$\log_e x \equiv \ln x \quad (62)$$

- dekadski logaritam kao bazu ima broj 10
- za dekadski logaritam koristimo oznaku bez baze

$$\log_{10} x \equiv \log x \quad (63)$$

- veza dekadskog i prirodnog logaritma

$$\log x = \frac{1}{\ln 10} \ln x \quad (64)$$

## 4 Zadaci za vježbu

### Zadatak 1

Izračunajte  $g \circ f$  i  $f \circ g$  ako je  $f(x) = x^2$  i  $g(x) = \sin x$ .

### Zadatak 2

Izračunajte  $g \circ f$  i  $f \circ g$  ako je  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$  i  $g(x) = x^2 + 2x + 1$ .

## Zadatak 3

Izračunajte  $g \circ f$  i  $f \circ g$  ako je  $f(x) = \sqrt{x}$  i  $g(x) = \sin x$ .

## Zadatak 4

Nađite inverznu funkciju funkcije  $f(x) = \sqrt{x} + 1$ .

## Zadatak 5

Nađite inverznu funkciju funkcije  $f(x) = \frac{1}{x-2}$ .

## Zadatak 6

Nađite inverznu funkciju funkcije  $f(x) = \sqrt{x-2}$ .

## Zadatak 7

Pokažite da je zbroj dviju parnih funkcija parna funkcija.

## Zadatak 8

Pokažite da je produkt parne i neparne funkcije neparna funkcija.

## Zadatak 9

Pokažite da je produkt dviju parnih funkcija parna funkcija.

## Zadatak 10

Pokažite da je produkt dviju neparnih funkcija parna funkcija.

## Zadatak 11

Izvedite sljedeće relacije

$$\log_a x^n = n \log_a x \quad \text{i} \quad \log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$$

# Osnove diferencijalnog računa

September 15, 2008

## 1 Uvod

### 1.1 Problem brzine

- želimo izračunati brzinu tijela
- ako put koji je tijelo prešlo možemo izraziti kao funkciju vremena

$$s = s(t) , \quad (1)$$

onda je prosječna brzina na intervalu  $[t_0, t_1]$  kvocijent prijeđenog puta i duljine vremenskog intervala

$$\bar{v} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} \quad (2)$$

Primjer 1: vertikalni hitac

- tijelu ispaljenom vertikalno uvis mjerimo položaj u određenim vremenskim intervalima
- rezultati mjerenja navedeni su u tablici 1.1

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| t (s) | 0.05  | 0.10  | 0.15  | 0.20  | 0.25  | 0.30  | 0.35  | 0.35  | 0.40  | 0.45  |
| h (m) | 0.238 | 0.451 | 0.640 | 0.804 | 0.943 | 1.059 | 1.149 | 1.215 | 1.257 | 1.273 |
| t (s) | 0.50  | 0.55  | 0.60  | 0.65  | 0.70  | 0.75  | 0.80  | 0.85  | 0.90  | 0.95  |
| h (m) | 1.274 | 1.266 | 1.234 | 1.178 | 1.097 | 0.991 | 0.861 | 0.706 | 0.527 | 0.323 |

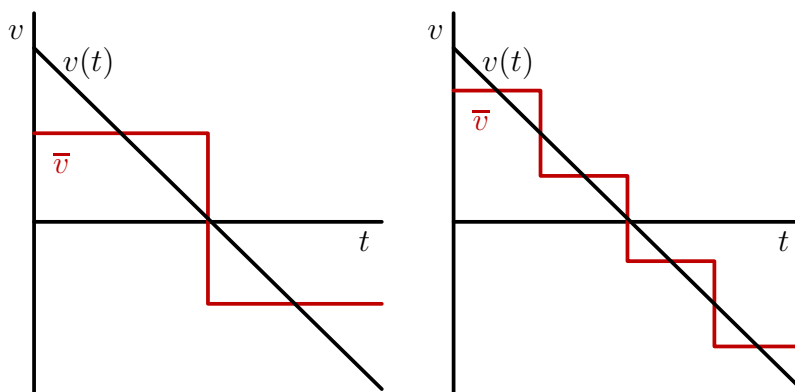
Tablica 1: Visina tijela u ovisnosti o vremenu.

- želimo izračunati prosječnu brzinu tijela na intervalu  $[t_0, t_1]$

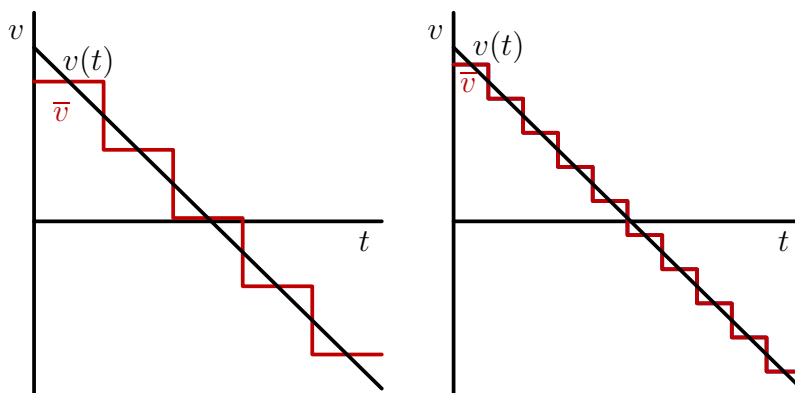
$$\bar{v}(t_0, t_1) = \frac{h_1 - h_0}{t_1 - t_0} \quad (3)$$

- na sljedeće četiri slike prikazane su srednje brzine za vrijednosti intervala  $\Delta t = 0.5, 0.25, 0.20, 0.10$  s
- srednju brzinu na slikama uspoređujemo s pravom brzinom
- tijelo se giba jednoliko ubrzano pa vrijedi

$$v(t) = v_0 - gt \quad (4)$$



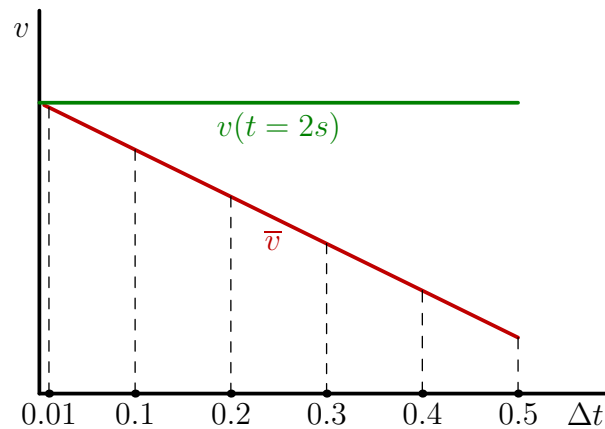
Slika 1: Prosječna brzina za intervale  $\Delta t = 0.5$ s (lijevo) i  $\Delta t = 0.25$ s (desno). Za usporedbu je nacrtana i prava brzina (crna linija).



Slika 2: Prosječna brzina za intervale  $\Delta t = 0.2$ s (lijevo) i  $\Delta t = 0.1$ s (desno). Za usporedbu je nacrtana i prava brzina (crna linija).

- sa slika je očito da se smanjivanjem intervala približavamo pravoj brzini
- na sljedećoj slici je prikazana prosječna brzina u trenutku  $t_0 = 2s$  u ovisnosti o duljini intervala  $\Delta t$

$$\bar{v} = \frac{s(t = 2s + \Delta t) - s(t = 2s)}{\Delta t} \quad (5)$$



Slika 3: Prosječna brzina u trenutku  $t = 2s$  u ovisnosti o duljini intervala  $\Delta t$ . Za usporedbu je horizontalnom linijom označena i prava brzina u trenutku  $t = 2s$ .

- možemo zaključiti da je prava brzina granični slučaj prosječne brzine

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \quad (6)$$

- oznaka

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \quad (7)$$

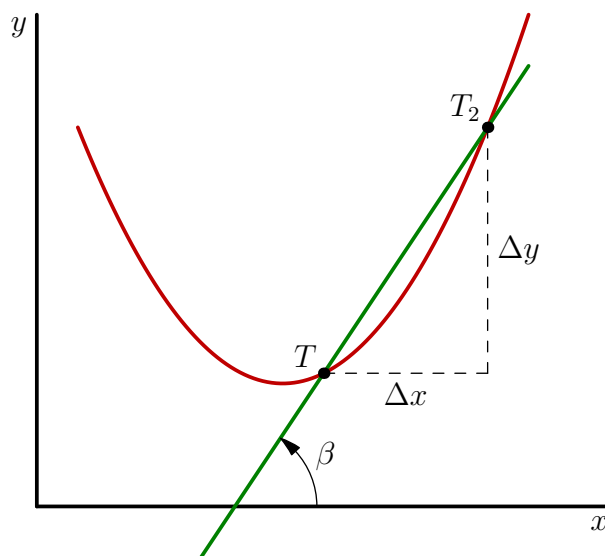
znači da se funkcija  $f(x)$  približava vrijednosti  $a$  (po volji blizu) kada se argument  $x$  približava vrijednosti  $x_0$

- dakle, ako se vremenski interval  $\Delta t$  približava nuli (postaje po volji mali) onda se vrijednost omjera  $\Delta s / \Delta t$  približava brzini čestice

## 1.2 Problem tangente

- želimo nacrtati tangentu na graf funkcije  $f(x)$  u točki  $T(x, y)$

- prvo crtamo sekantu tj. pravac koji siječe krivulju u točkama  $T(x, f(x))$  i  $T_2(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$

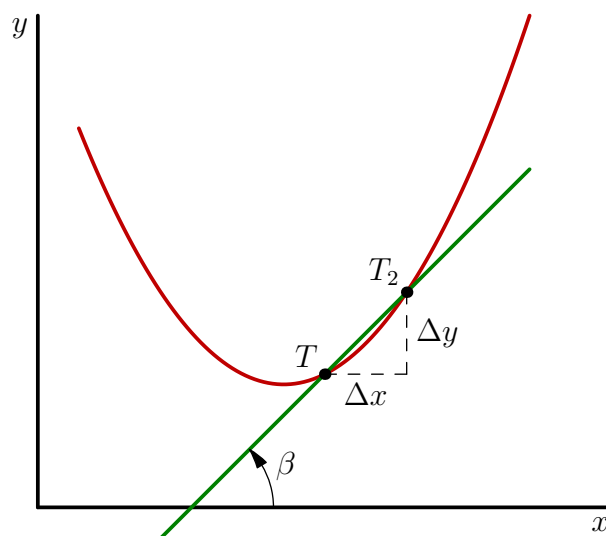


Slika 4: Sekanta koja prolazi kroz točke  $T$  i  $T_2$ .

- nagib sekante možemo odrediti iz pravokutnog trokuta na sl. 4

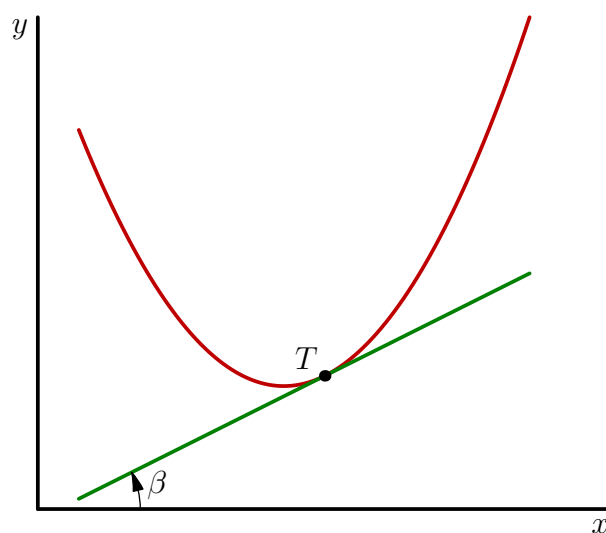
$$\tan \beta = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (8)$$

- ako točku  $T_2$  približavamo točki  $T$  (tj. ako smanjujemo vrijednost  $\Delta x$ ), kao na sl. 5, sekanta se približava tangenti



Slika 5: Približavanjem točke  $T_2$  točki  $T$  sekanta se približava tangenti.

- konačno, ako  $\Delta x \rightarrow 0$  sekanta prelazi u tangentu prikazanu na sl. 6



Slika 6: Tangenta na graf funkcije  $f(x)$  u točki  $T(x, f(x))$

- primjeri na slikama odgovaraju tangenti na graf funkcije  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6$  u točki  $x = 3.5$
- u tablici 1.2 navedene su vrijednosti kuta  $\beta$  za nekoliko razmaka točaka  $T$  i  $T_2$

|            |        |        |        |        |
|------------|--------|--------|--------|--------|
| $\Delta x$ | 2      | 1      | 0.5    | 0.0    |
| $\beta$    | $56^0$ | $45^0$ | $37^0$ | $27^0$ |

Tablica 2: Vrijednosti nagiba sekante za nekoliko razmaka među točkama  $T$  i  $T_2$ .

## 2 Pojam derivacije

### 2.1 Prirast funkcije

- neka su  $x_1$  i  $x_2$  vrijednosti argumenta  $x$ , a  $y_1 = y(x_1)$  i  $y_2 = y(x_2)$  odgovarajuće vrijednosti funkcije  $y = f(x)$
- prirast argumenta  $x$  u intervalu  $[x_1, x_2]$  definiramo kao

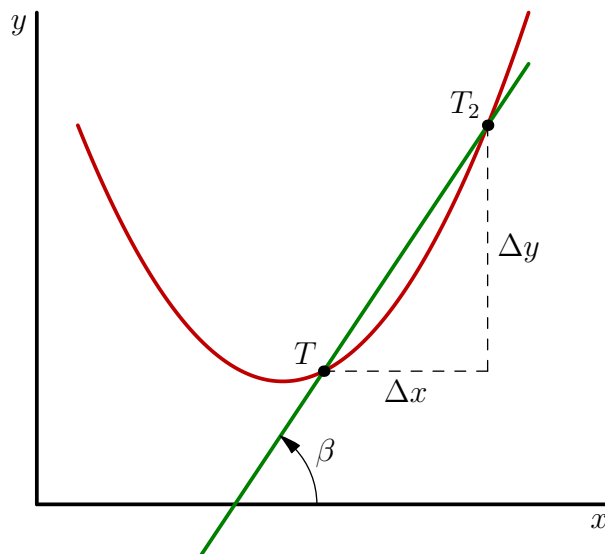
$$\Delta x = x_2 - x_1, \quad (9)$$

a prirast funkcije  $y$  kao

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \quad (10)$$

- prirast funkcije ovisi o točki  $x_1$ , prirastu argumenta  $\Delta x$  i samoj funkciji  $f$
- kvocijent  $\Delta y / \Delta x$  predstavlja srednju brzinu promjene funkcije  $y$  u intervalu  $[x_1, x_1 + \Delta x]$
- omjer prirasta funkcije i prirasta argumenta odgovara koeficijentu smjera sekante  $TT_2$  grafa funkcije  $y = f(x)$

$$\tan \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (11)$$



Slika 7: Koeficijent smjera sekante jednak je omjeru prirasta funkcije i prirasta argumenta.

Primjer:

- računamo prirast funkcije

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6 \quad (12)$$

u točki  $x_1 = 3$

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ &= \frac{1}{2}(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 6 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 6 \\ &= x\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 - 3\Delta x \end{aligned} \quad (13)$$

- sada možemo izračunati prirast u bilo kojoj točki
- npr., uvrstimo  $x = 3.5$  u jedn. (13)

$$\Delta f|_{x=3.5} = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 + \frac{1}{2}\Delta x \quad (14)$$

- promotrimo nekoliko konkretnih vrijednosti prirasta funkcije  $\Delta f$  i nagiba sekante  $\beta$  u točki  $x = 3.5$

| $\Delta x$ | 1.4      | 1.2      | 1.0    | 0.8      | 0.6      | 0.4    | 0.2    | 0.1      | 0.05     | 0.01     |
|------------|----------|----------|--------|----------|----------|--------|--------|----------|----------|----------|
| $\Delta f$ | 1.68     | 1.32     | 1.0    | 0.72     | 0.48     | 0.28   | 0.12   | 0.06     | 0.026    | 0.005    |
| $\beta$    | $50.2^0$ | $47.7^0$ | $45^0$ | $42.0^0$ | $38.7^0$ | $35^0$ | $31^0$ | $28.8^0$ | $27.7^0$ | $26.8^0$ |

Tablica 3: Prirast funkcije  $\Delta f$  i nagibi sekanata grafa funkcije u točki  $x = 3.5$  za funkciju definiranu u jedn. (12) u ovisnosti o prirastu argumenta  $\Delta x$ .

- ako smanjujemo prirast argumenta  $\Delta x$ , prirast funkcije se također smanjuje dok se nagib sekante približava vrijednosti  $\beta \approx 26^0$

## 2.2 Derivacija funkcije

- derivaciju funkcije  $f$  u točki  $x$  definiramo kao graničnu vrijednost

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (15)$$

- za derivaciju funkcije u upotrebi su još neke oznake

$$\frac{df}{dx} \equiv f'(x) \equiv \dot{f}(x) \quad (16)$$

- oznaku  $\dot{f}$  obično koristimo u mehanici

Primjer: derivacija funkcije  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$

- prirast ove funkcije smo već izračunali u prošlom odjeljku

$$\Delta f = x\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 - 3\Delta x \quad (17)$$

- podijelimo prirast funkcije s prirastom argumenta

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{2}\Delta x + x - 3 \quad (18)$$

- konačno, odredimo graničnu vrijednost

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2}\Delta x + x - 3 \right) = x - 3 \quad (19)$$

- derivacija funkcije  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$  glasi

$$\frac{df}{dx} = x - 3 \quad (20)$$

- nagib tangente u točki  $x = 3.5$

$$\tan \beta = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=3.5} = (x - 3)|_{x=3.5} = 0.5 \implies \beta = 26.56^\circ \quad (21)$$

- nagibi sekanata navedeni u tablici 2.1 približavaju se upravo gornjoj vrijednosti  $\beta = 26.56^\circ$
- prve primjene derivacija koje susrećemo u fizici su brzina i akceleracija čestice
- brzina odgovara derivaciji puta po vremenu

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (22)$$

- akceleracija odgovara derivaciji brzine po vremenu

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (23)$$

### 3 Osnovna pravila deriviranja

#### 3.1 Suma i razlika funkcija

- derivacija sume jednaka je sumi derivacija

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad (24)$$

- označimo sumu funkcija  $f$  i  $g$  s  $h$

$$h(x) = f(x) + g(x) \quad (25)$$

- prirast funkcije  $h(x)$

$$\begin{aligned} \Delta h &= (f + g)(x + \Delta x) - (f + g)(x) \\ &= f(x + \Delta x) - f(x) + g(x + \Delta x) - g(x) \\ &= \Delta f + \Delta g \end{aligned} \quad (26)$$

- kvocijent prirasta

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \quad (27)$$

- tražimo graničnu vrijednost

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned} \quad (28)$$

- analognim postupkom bi pokazali da je derivacija razlike funkcija jednaka razlici derivacija

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) \quad (29)$$

### 3.2 Produkt funkcija

- promatramo produkt funkcija

$$h(x) = f(x)g(x) \quad (30)$$

- promjena argumenta  $\Delta x$  vodi na

$$h + \Delta h = (f + \Delta f)(g + \Delta g) = fg + (\Delta f)g + f(\Delta g) + (\Delta f)(\Delta g) \quad (31)$$

- prirast produkta funkcija

$$\begin{aligned} \Delta h &= fg + (\Delta f)g + f(\Delta g) + (\Delta f)(\Delta g) - fg \\ &= (\Delta f)g + f(\Delta g) + (\Delta f)(\Delta g) \end{aligned} \quad (32)$$

- kvocijent prirasta

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = f \frac{\Delta g}{\Delta x} + g \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x} \Delta g \quad (33)$$

- tražimo graničnu vrijednost

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} \\ &= f \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} + g \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \Delta g \\ &= f(x)g'(x) + f'(x)g(x) + f'(x) \cdot 0 \end{aligned} \quad (34)$$

- derivacija produkta iznosi

$$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x) \quad (35)$$

### 3.3 Kvocijent funkcija

- promatramo kvocijent funkcija

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (36)$$

- promjena argumenta  $\Delta x$  vodi na

$$h + \Delta h = \frac{f + \Delta f}{g + \Delta g} \quad (37)$$

- prirast kvocijenta funkcija

$$\begin{aligned} \Delta h &= \frac{f + \Delta f}{g + \Delta g} - \frac{f}{g} = \frac{(f + \Delta f)g - f(g + \Delta g)}{(g + \Delta g)g} \\ &= \frac{fg + (\Delta f)g - fg - f(\Delta g)}{g^2 + (\Delta g)g} \\ &= \frac{g(\Delta f) - f(\Delta g)}{g^2 + (\Delta g)g} \end{aligned} \quad (38)$$

- omjer prirasta  $\Delta h$  i prirasta argumenta  $\Delta x$

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{g \frac{\Delta f}{\Delta x} - f \frac{\Delta g}{\Delta x}}{g^2 + (\Delta g)g} \quad (39)$$

- granična vrijednost prirasta kvocijenta funkcija

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{gf' - fg'}{g^2} \quad (40)$$

### 3.4 Kompozicija funkcija

- postupak deriviranja kompozicija funkcija ćemo samo objasniti bez dokaza
- pretpostavimo da su zadane dvije funkcije  $f(x)$  i  $g(x)$ , kao i njihova kompozicija

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (41)$$

- složenu funkciju  $h(x)$  deriviramo u tri koraka
- prvo deriviramo funkciju  $g(y)$  i u nju uvrstimo funkciju  $f(x)$
- zatim deriviramo funkciju  $f(x)$
- na kraju pomnožimo rezultate prvog i drugog koraka

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad (42)$$

## 4 Derivacije elementarnih funkcija

- izravno računanje derivacija elementarnih funkcija pokazat ćemo na jednostavnom primjeru cjelobrojnih potencija
- postupak za ostale elementarne funkcije je vrlo sličan
- u praksi koristimo tablicu derivacija elementarnih funkcija koja je navedena na kraju poglavlja
- tražimo derivaciju funkcije  $g(x) = x^n$
- prirast funkcije  $g(x)$

$$\Delta g = g(x + \Delta x) - g(x) = (x + \Delta x)^n - x^n \quad (43)$$

- iskoristimo binomni teorem

$$(x + \Delta x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (\Delta x)^k \quad (44)$$

- član  $k = 0$  u sumi (44) se poništi s članom  $x^n$  u jedn. (43) i preostaje

$$\Delta g = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (\Delta x)^k \quad (45)$$

- omjer prirasta funkcije  $x^n$  i prirasta argumenta

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (\Delta x)^k = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (\Delta x)^{k-1} \quad (46)$$

- da bi izračunali derivaciju, potrebna nam je granična vrijednost izraza (46)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (\Delta x)^{k-1} \quad (47)$$

- svi članovi  $(\Delta x)^{k-1}$  iščezavaju osim člana s nultom potencijom

$$(\Delta x)^{k-1} \rightarrow 0 \quad \text{osim za } k = 1 \quad (48)$$

- derivacija funkcije  $x^n$

$$\frac{dg}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = \binom{n}{1} x^{n-1} \quad (49)$$

- binomni koeficijent

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = n \quad (50)$$

- konačno, derivacija cjelobrojne potencije

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \quad (51)$$

- odavde odmah sljedi da derivacija konstante iščezava jer je u tom slučaju  $n = 1$

$$\frac{dc}{dx} = 0, \quad c = \text{konst.} \quad (52)$$

%item nešto složnijim postupkom bi dokazali da

- derivacije elementarnih funkcija možemo sažeti u sljedećoj tablici

| $f(x)$            | $f'(x)$                   |
|-------------------|---------------------------|
| c                 | 0                         |
| $x^c$             | $cx^{c-1}$                |
| $e^x$             | $e^x$                     |
| $\ln x$           | $\frac{1}{x}$             |
| $\sin x$          | $\cos x$                  |
| $\cos x$          | $-\sin x$                 |
| $\tan x$          | $\frac{1}{\cos^2 x}$      |
| $\cot x$          | $-\frac{1}{\sin^2 x}$     |
| $\arcsin x$       | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  |
| $\arccos x$       | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arctan x$       | $\frac{1}{1+x^2}$         |
| $\text{arccot} x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$        |

Tablica 4: Derivacije elementarnih funkcija.

## 5 Primjeri

### 5.1 Derivacija produkta funkcija: $h(x) = x \sin x$

- računamo derivaciju funkcije  $h(x) = x \sin x$
- radi se o produktu dvije funkcije  $f(x) = x$  i  $g(x) = \sin x$

- derivacija produkta dvije funkcije

$$\frac{d}{dx} [f(x)g(x)] = \frac{df}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg}{dx} \quad (53)$$

- deriviramo funkcije  $f$  i  $g$

$$\frac{df}{dx} = 1 \quad \text{i} \quad \frac{dg}{dx} = \cos x \quad (54)$$

i uvrstimo ih u jedn. (53)

$$\frac{d}{dx} [x \sin x] = \sin x + x \cos x \quad (55)$$

## 5.2 Derivacija kvocijenta funkcija

- računamo derivaciju funkcije  $h(x) = \frac{\sin x}{x}$
- radi se o kvocijentu dviju funkcija  $f(x) = \sin x$  i  $g(x) = x$
- derivacija kvocijenta dviju funkcija

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{gf' - fg'}{g^2} \quad (56)$$

- deriviramo funkcije  $f$  i  $g$

$$\frac{df}{dx} = 1 \quad \text{i} \quad \frac{dg}{dx} = \cos x \quad (57)$$

i uvrstimo ih u jedn. (56)

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\sin x}{x} \right] = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \quad (58)$$

## 5.3 Derivacija kompozicije funkcija: $h(x) = \cos^3 x$

- računamo derivaciju kompozicije funkcija

$$g(x) = \cos x \quad \text{i} \quad f(y) = y^3 \implies f(g(x)) = (\cos x)^3 \quad (59)$$

- derivacija kompozicije  $h = f \circ g$

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (60)$$

- deriviramo funkciju  $f(y)$

$$f'(y) = (y^3)' = 3y^2 \quad (61)$$

i uvrstimo  $y = g(x)$  tj.  $y = \cos x$

$$f'(g(x)) = 3 \cos^2 x \quad (62)$$

- još moramo izračunati derivaciju funkcije  $g(x)$

$$g'(x) = -\sin x \quad (63)$$

- derivacija kompozicije  $h(x)$

$$\frac{d}{dx} [\cos^3 x] = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 3 \cos^2 x \cdot (-\sin x) = -3 \cos^2 x \sin x \quad (64)$$

## 6 Zadaci za vježbu

Izračunajte derivacije sljedećih funkcija

- $f(x) = -2x$
- $f(x) = 5x^2$
- $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x + 1$
- $f(x) = 1/x$
- $f(x) = x^2 \cos x$
- $f(x) = e^x \ln x$
- $f(x) = \frac{\sin x}{x}$
- $f(x) = \sin x^2$
- $f(x) = (\cos x)^3$

Rješenja:

- $f'(x) = -2 \implies f'(1) = -2$
- $f'(x) = 10x \implies f'(1) = 10$

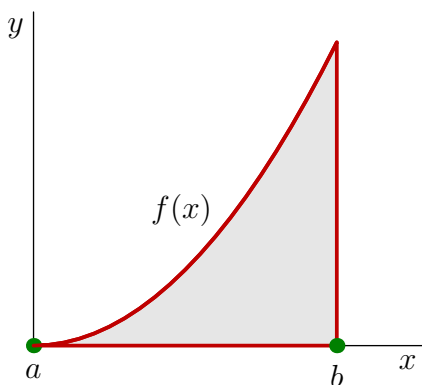
- $f'(x) = 9x^2 - 8x + 2 \implies f'(1) = 3$
- $f'(x) = -1/x^2 \implies f'(1) = -1$
- $f'(x) = 2x \cos x - x^2 \sin x \implies f'(1) = 1.982$
- $f'(x) = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x} \implies f'(1) = e(1 + \ln 1) = e = 2.718$
- $f'(x) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \implies f'(1) = \cos 1 - \sin 1 = 0.982$
- $f'(x) = 2x \cos x^2 \implies f'(1) = 1.9997$
- $f'(x) = -3 \cos^2 x \sin x \implies f'(1) = -0.052$

# Osnove integralnog računa

September 12, 2008

## 1 Problem površine

- želimo izračunati površinu omeđenu grafom funkcije  $f(x)$  između točaka  $x = a$  i  $x = b$



Slika 1: Površina omeđena grafom funkcije  $f(x)$ .

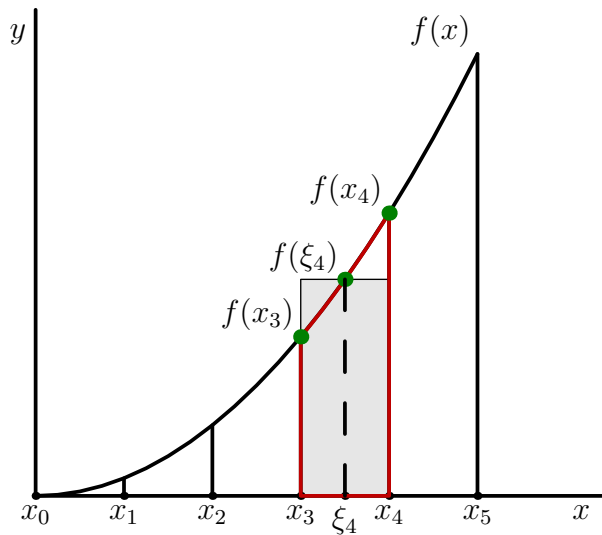
- interval  $[a, b]$  podijelimo na  $n$  podintervala

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n] \quad (1)$$

- početna točka odgovara lijevoj, a krajnja desnoj granici intervala

$$x_0 = a \quad \text{i} \quad x_n = b \quad (2)$$

- na svakom podintervalu  $[x_{i-1}, x_i]$  odaberemo proizvoljnu točku  $\xi_i$



Slika 2: Primjer podjele intervala  $[a, b]$  na pet podintervala.

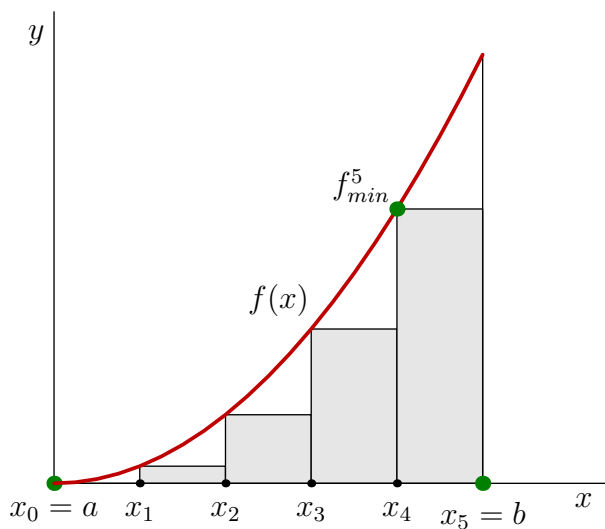
- površinu ispod grafa na podintervalu  $[x_{i-1}, x_i]$  možemo približno zamijeniti s površinom pravokutnika širine  $x_i - x_{i-1}$  i visine  $f(\xi_i)$

$$S_i = [x_i - x_{i-1}] \cdot f(\xi_i) \quad (3)$$

- zbrajanje površina svih pravokutnika daje približnu vrijednost ukupne površine

$$S = \sum_i S_i = \sum_i [x_i - x_{i-1}] \cdot f(\xi_i) \quad (4)$$

- sumu  $S$  u jedn. (4) zovemo integralna suma
- u daljnjim razmatranjima koristit ćemo još i pojmove gornje i donje integralne sume
- donju integralnu sumu definiramo tako da za  $\xi_i$  odaberemo točku u kojoj funkcija postiže minimalnu vrijednost na intervalu  $[x_{i-1}, x_i]$
- označimo s  $f_{min}^i$  minimalnu vrijednost funkcije  $f(x)$  na  $i$ -tom podintervalu



Slika 3: Donja integralna suma.

- površina  $i$ -tog pravokutnika iznosi

$$S_i = [x_i - x_{i-1}] \cdot f_{min}^i \quad (5)$$

- za bilo koju točku  $\xi_i$  na  $i$ -tom podintervalu vrijedi

$$f(\xi_i) \geq f_{min}^i \implies f(\xi_i)[x_i - x_{i-1}] \geq f_{min}^i[x_i - x_{i-1}] \quad (6)$$

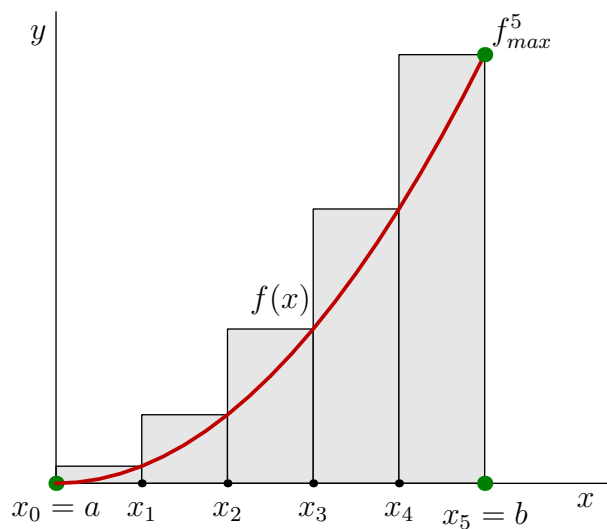
- sumacijom po svim podintervalima dolazimo do zaključka

$$\sum_i f(\xi_i)[x_i - x_{i-1}] \geq \sum_i f_{min}^i[x_i - x_{i-1}] \quad (7)$$

- površina omeđena grafom  $f(x)$  sigurno je veća od donje integralne sume definirane izrazom

$$S_{min} = \sum_i f_{min}^i(x_i - x_{i-1}) \quad (8)$$

- označimo s  $f_{max}^i$  maksimalnu vrijednost funkcije  $f(x)$  na  $i$ -tom podintervalu



Slika 4: Gornja integralna suma.

- za bilo koju točku  $\xi_i$  na  $i$ -tom podintervalu vrijedi

$$f(\xi_i) \leq f_{max}^i \implies f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq f_{max}^i(x_i - x_{i-1}) \quad (9)$$

- sumacijom po svim podintervalima dolazimo do zaključka

$$\sum_i f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_i f_{max}^i(x_i - x_{i-1}) \quad (10)$$

- površina omeđena grafom  $f(x)$  sigurno je manja od gornje integralne sume definirane izrazom

$$S_{max} = \sum_i f_{max}^i(x_i - x_{i-1}) \quad (11)$$

Primjer: površina ispod grafa funkcije  $f(x) = x^2$  na intervalu  $[0, 1]$

- radi jednostavnosti koristimo podintervale jednake dužine

$$x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n} \quad (12)$$

Slika 5: Podjela intervala  $[0, 1]$  na 5 podintervala.

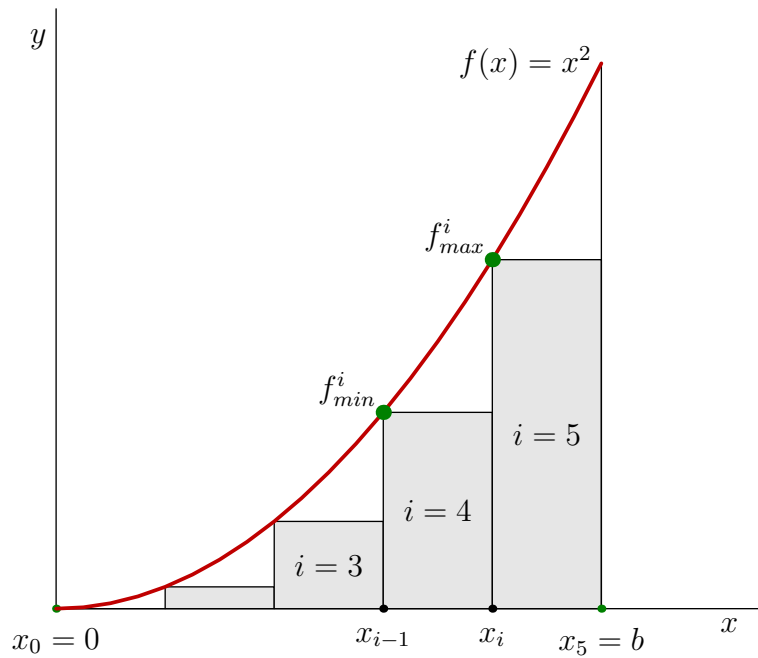
- točke kojima dijelimo interval  $[0, 1]$  na  $n$  podintervala

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_n = 1 \quad (13)$$

- funkcija  $f(x) = x^2$  strogo raste pa na podintervalu  $[x_{i-1}, x_i]$  postiže minimalnu vrijednost u točki  $x_{i-1}$ , a maksimalnu u točki  $x_i$

$$f_{min}^i = f(x_{i-1}) = \left[ \frac{i-1}{n} \right]^2 \quad (14)$$

$$f_{max}^i = f(x_i) = \left[ \frac{i}{n} \right]^2 \quad (15)$$



Slika 6: Minimalna i maksimalna vrijednost funkcije na podintervalu  $[x_{i-1}, x_i]$ .

- donja integralna suma glasi

$$S_{min} = \sum_{i=1}^n f_{min}^i [x_i - x_{i-1}] = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{i-1}{n} \right]^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 \quad (16)$$

- gornja integralna suma glasi

$$S_{max} = \sum_{i=1}^n f_{max}^i [x_i - x_{i-1}] = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{i}{n} \right]^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \quad (17)$$

- osim donje i gornje integralne sume, još možemo izračunati i običnu integralnu sumu
- točku  $\xi_i$  odaberemo kao polovište intervala  $[x_{i-1}, x_i]$

$$\xi_i = x_{i-1} + \frac{1}{2}[x_i - x_{i-1}] = \frac{i-1}{n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}(2i-1) \quad (18)$$

- integralna suma glasi

$$S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)[x_i - x_{i-1}] = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{2i-1}{2n} \right]^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{4n^3} \sum_{i=1}^n (2i-1)^2 \quad (19)$$

- sumu prvih  $n$  cijelih brojeva i sumu kvadrata prvih  $n$  cijelih brojeva računamo koristeći formule

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \quad (20)$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad (21)$$

- obje formule možemo dokazati matematičkom indukcijom
- primjenimo formulu (21) na donju i gornju integralnu sumu

$$\begin{aligned} S_{min} &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 = \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] \\ \implies S_{min} &= \frac{1}{6n^2}(n-1)(2n-1) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} S_{max} &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + n^2] \\ \implies S_{max} &= \frac{1}{6n^2}(n+1)(2n+1) \end{aligned} \quad (23)$$

- preostala nam je još integralna suma

$$S = \sum_{i=1}^n (2i-1)^2 \frac{1}{4n^2} \frac{1}{n} = \frac{1}{4n^3} \sum_{i=1}^n (2i-1)^2 \quad (24)$$

- kvadriramo izraz  $2i-1$

$$\sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = \sum_{i=1}^n (4i^2 - 4i + 1) = 4 \sum_{i=1}^n i^2 - 4 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \quad (25)$$

$$= \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n \quad (26)$$

$$= \frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1) \quad (27)$$

- integralna suma glasi

$$S = \frac{1}{12n^2}(2n+1)(2n-1) \quad (28)$$

- sada možemo usporediti sve tri integralne sume

$$S_{min} = \frac{1}{6n^2}(n-1)(2n-1) \quad (29)$$

$$S = \frac{1}{12n^2}(2n+1)(2n-1) \quad (30)$$

$$S_{max} = \frac{1}{6n^2}(n+1)(2n+1) \quad (31)$$

- povećavanjem broja podintervala (tj. broja  $n$ ) očekujemo približavanje vrijednosti svih triju suma

| $n$ | $S_{min}$ | $S$   | $S_{max}$ |
|-----|-----------|-------|-----------|
| 3   | 0.185     | 0.324 | 0.519     |
| 5   | 0.240     | 0.330 | 0.44      |
| 9   | 0.280     | 0.332 | 0.391     |
| 15  | 0.301     | 0.333 | 0.367     |
| 50  | 0.323     | 0.333 | 0.343     |

Tablica 1: Usporedba vrijednosti integralnih suma za razne podjele intervala  $[0, 1]$ .

## 2 Svojstva određenog integrala

### 2.1 Osnovna svojstva

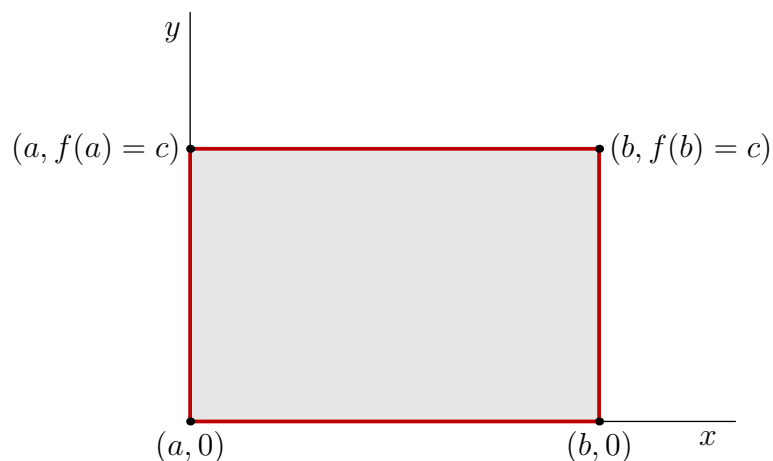
- iz definicije određenog integrala (površina pod krivuljom  $f(x)$ ) slijedi

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad (32)$$

- ako se granice integracije poklapaju, površine nema pa integral iščezava
- ako zamijenimo granice integracije, integral mijenja predznak

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx, \quad a < b \quad (33)$$

- ovo svojstvo možemo ilustrirati na jednostavnom primjeru  $f(x) = c$



Slika 7: Primjer kod zamjene granica integracije.

- površina pravokutnika iznosi  $P = (b - a) \cdot c$
- računamo površinu integriranjem

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot c \quad (34)$$

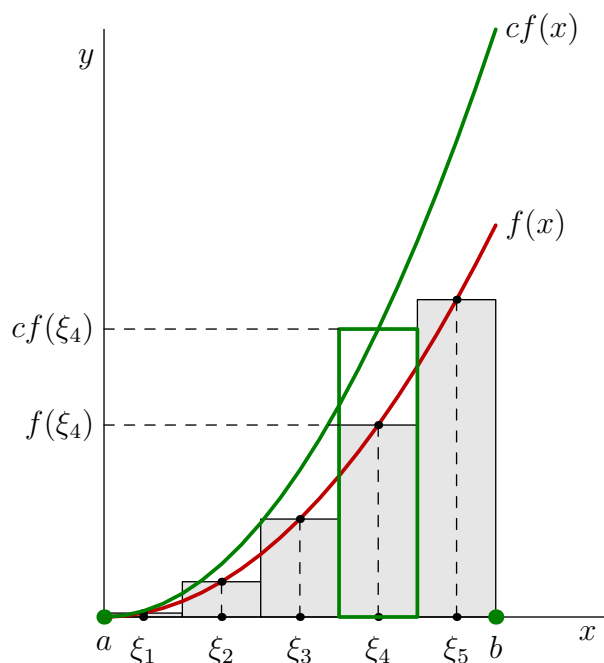
- sada zamjenimo granice integracije

$$\int_b^a f(x) dx = (a - b) \cdot c = - \int_a^b f(x) dx \quad (35)$$

- ako funkciju  $f(x)$  pomnožimo konstantom  $c$ , površina ispod nove krivulje  $cf(x)$  glasi

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx \quad (36)$$

- ovo svojstvo možemo pokazati sljedećom slikom

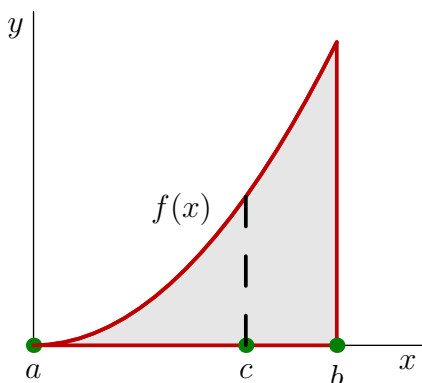
Slika 8: Graf funkcije  $f(x)$  pomnožen konstantom  $c$ .

- visina svakog pravokutnika se poveća za faktor  $c$  pa se i površina svakog pravokutnika poveća za faktor  $c$
- ukupnu površinu dobijemo zbrajanjem svih pravokutnika što vodi na formulu (36)
- jednakim postupkom bi pokazali da vrijede sljedeće relacije

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad (37)$$

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \quad (38)$$

- pretpostavimo, na kraju, da interval integracije  $[a, b]$  podijelimo na dva dijela točkom  $c$

Slika 9: Podjela intervala integracije na dva dijela točkom  $c$ .

- ukupna površina je suma površine koju dobijemo integriranjem od  $a$  do  $c$  i površine koju dobijemo integriranjem od  $c$  do  $b$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (39)$$

## 2.2 Teorem srednje vrijednosti

- promatramo integral funkcije  $f(x)$  na intervalu  $[a, b]$
- označimo minimalnu i maksimalnu vrijednost funkcije  $f(x)$  na intervalu  $[a, b]$  s  $f_{min}$  i  $f_{max}$
- iz definicije integrala slijedi procjena

$$f_{min} \cdot [b - a] \leq \int_a^b f(x)dx \leq f_{max} \cdot [b - a] \quad (40)$$

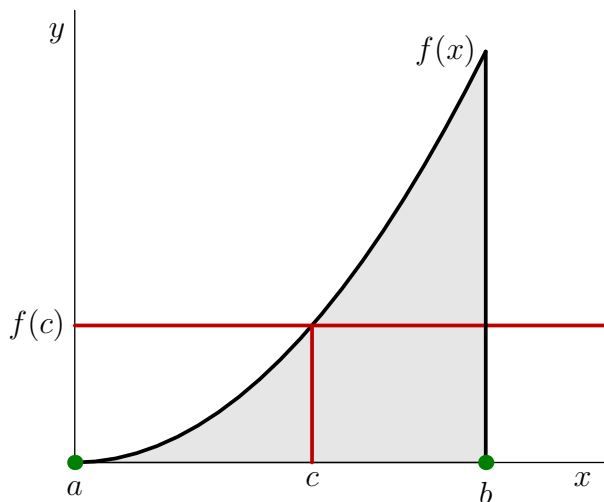
- podijelimo gornju jednadžbu s duljinom intervala

$$f_{min} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f_{max} \quad (41)$$

- funkcija  $f(x)$  poprima sve vrijednosti između minimalne i maksimalne vrijednosti pa na intervalu  $[a, b]$  sigurno postoji broj  $c$  za koji vrijedi

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx, \quad c \in [a, b] \quad (42)$$

- broj  $f(c)$  zovemo srednja vrijednost funkcije  $f(x)$  na intervalu  $[a, b]$



Slika 10: Srednja vrijednost funkcije  $f(x)$  na intervalu  $[a, b]$ .

### 3 Newton-Leibnizova formula

- ako za funkciju  $f(t)$  postoji integral na intervalu  $[a, b]$  možemo definirati funkciju

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (43)$$

- funkcije  $F$  i  $f$  vezane su sljedećom relacijom

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (44)$$

- da bi dokazali prethodnu jednadžbu, koristimo definiciju derivacije

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \quad (45)$$

- iskoristimo jedn. (33) da bi promijenili granice integracije u desnom integralu

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt \quad (46)$$

- sada iskoristimo jedn. (37) da bi prethodni izraz sveli na jedan integral

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt \quad (47)$$

- na intervalu  $[x, x + \Delta x]$  sigurno postoji broj  $c$  sa svojstvom (teorem srednje vrijednosti)

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta x \cdot f(c), \quad c \in [x, x + \Delta x] \quad (48)$$

- prema definiciji derivacije

$$\frac{d}{dx} F(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) \quad (49)$$

- broj  $c$  se nalazi unutar intervala  $[x, x + \Delta x]$
- ako interval dovoljno suzimo ( $\Delta x \rightarrow 0$ ) broj  $c$  će se poklopiti s brojem  $x$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = f(x) \quad (50)$$

- funkciju  $F(x)$  sa svojstvom

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x) \quad (51)$$

zovemo primitivna funkcija za funkciju  $f(x)$

- primitivna funkcija je određena do na konstantu  $C$

$$\frac{d}{dx} [F(x) + C] = \frac{dF}{dx} + \frac{dC}{dx} \quad (52)$$

- derivacija konstante ivšćezava pa slijedi

$$\frac{d}{dx} [F(x) + C] = \frac{dF}{dx} = f(x) \quad (53)$$

- možemo zaključiti da je  $F(x) + C$  jednako dobra primitivna funkcija kao i  $F(x)$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad \frac{dF}{dx} = f(x) \quad (54)$$

- dakle, računanje određenog integrala se svodi na problem pronalaženja primitivne funkcije

Primjer 1:  $\int_0^1 x^3 dx$

- koristimo jedn. (54)

$$\int_0^1 x^3 dx = F(1) - F(0), \quad (55)$$

gdje je  $F(x)$  primitivna funkcija za funkciju  $f(x) = x^3$

- koju funkciju trebamo derivirati da bi kao rezultat dobili funkciju  $f(x) = x^3$
- prisjetimo se formule za derivaciju potencije

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1} \implies x^3 = \frac{1}{4} \frac{d}{dx} x^4 \quad (56)$$

- primitivna funkcija u ovom slučaju glasi

$$F(x) = \frac{1}{4} x^4 \quad (57)$$

- vratimo se jedn. (55)

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} 1^4 - \frac{1}{4} 0^4 = \frac{1}{4} \quad (58)$$

- neodređene integrale najčešće korištenih elementarnih funkcija možemo sažeti u sljedećoj tablici

| $f(x)$   | $\int f(x) dx$                                          |
|----------|---------------------------------------------------------|
| 0        | $c$ (konstanta)                                         |
| 1        | $x + c$                                                 |
| $x^a$    | $x^{a+1}/(a+1) + c, \quad a \neq -1, a \in \mathcal{R}$ |
| $1/x$    | $\ln  x  + c, \quad x \neq 0$                           |
| $e^x$    | $e^x + c$                                               |
| $\sin x$ | $-\cos x + c$                                           |
| $\cos x$ | $\sin x + c$                                            |

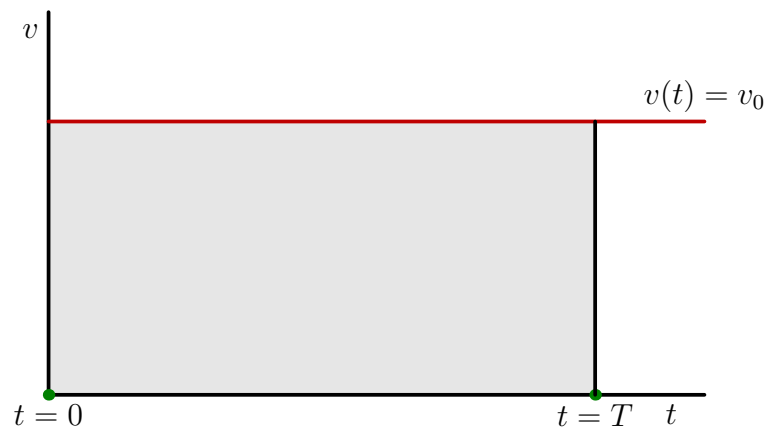
Tablica 2: Integrali elementarnih funkcija.

- općenito, integriranje je teže od deriviranja

## 4 Problem puta

- čestica se giba po pravcu brzinom  $v(t)$
- poznati primjeri su
  - jednoliko gibanje:  $v(t) = v_0$
  - jednoliko ubrzano gibanje:  $v(t) = at$ , gdje je  $a$  konstantno ubrzanje čestice
- tražimo put koji čestica prevari u prvih nakon vremena  $T$
- ako je gibanje jednoliko, trebamo pomnožiti brzinu  $v_0$  i vrijeme gibanja  $T$

$$s(T) = v_0 T \quad (59)$$



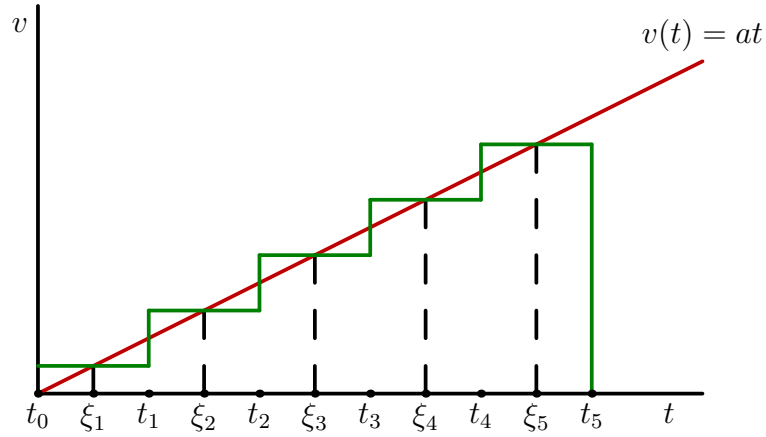
Slika 11: Ovisnost brzine o vremenu u slučaju jednolikog gibanja.

- put  $s(T)$  jednak je površini ispod grafa brzine na  $vt$  dijagramu (4)
- kod složenijih primjera, kao npr. jednoliko ubrzano gibanje, problem rješavamo dijeljenjem vremenskog intervala  $[0, T]$  na  $n$  podintervala točkama

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t \quad (60)$$

- dužinu pojedinog podintervala označimo s

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} \quad (61)$$



Slika 12: Ovisnost brzine o vremenu u slučaju jednolikog ubrzanog gibanja.

- ako su podintervali dovoljno mali, gibanje na svakom od njih možemo aproksimirati jednolikim gibanjem
- odaberemo proizvoljnu točku  $\xi_i$  na podintervalu  $[t_{i-1}, t_i]$
- brzinu na cijelom tom podintervalu zamijenimo brzinom u točki  $\xi_i$
- za svaki podinterval sada možemo izračunati prevaljeni put

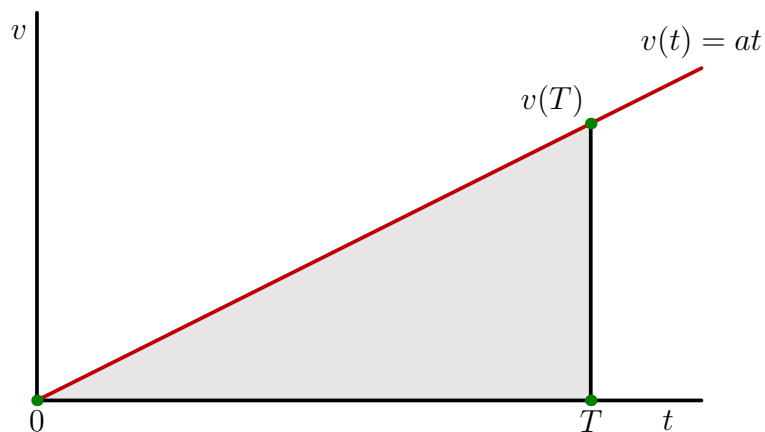
$$s_i = v(\xi_i)[t_{i-1} - t_i] \quad (62)$$

- zbrojimo doprinose svih podintervala

$$s(T) = \sum_{i=1}^n v(\xi_i)[t_{i-1} - t_i] \quad (63)$$

- opet smo došli do integralne sume
- put koji čestica prevari jednak je površini ispod krivulje  $v(t)$  i za općenite slučajeve, a ne samo za jednoliko gibanje
- u općenitom slučaju moramo riješiti integral

$$s(T) - s(0) = \int_0^T v(t) dt \quad (64)$$



Slika 13: Prevaljeni put  $s(T)$  jednak je površini ispod krivulje  $v(t)$ .

- u slučaju jednolikog ubrzanog gibanja krivulja  $v(t)$  je pravac pa tražimo površinu pravokutnog trokuta s katetama  $T$  i  $v(T)$

$$s(T) = \frac{1}{2}T \cdot v(T) = \frac{1}{2}aT^2 \quad (65)$$

- do istog rezultata bi došli rješavajući integral (64)

$$s(T) - s(0) = \int_0^T at dt \quad (66)$$

- akceleracija je konstantna pa je možemo izvući izvan integrala
- prema pretpostavci, u početnom trenutku čestica se nalazi u ishodištu  $\Rightarrow s(0) = 0$

$$s(T) = a \int_0^T t dt = \frac{a}{2} t^2 \Big|_0^T = \frac{a}{2} [T^2 - 0^2] = \frac{a}{2} T^2 \quad (67)$$

## 5 Zadaci za vježbu

### Zadatak 1

Izračunajte sljedeće integrale:

- $\int_0^1 x^3 dx$
- $\int_0^1 x^n dx$

- $\int_{-1}^1 x^3 dx$
- $\int_{-1}^1 x^2 dx$
- $\int_0^\pi \sin x dx$
- $\int_0^\pi \cos x dx$
- $\int_0^{2\pi} \sin x dx$
- $\int_0^{2\pi} \cos x dx$

## Zadatak 2

Čestica se giba po pravcu jednoliko ubrzano akceleracijom  $a$  s početnom brzinom  $v_0$ . Napišite izraz za brzinu i pomoću integrala nađite put koji čestica prijeđu u vremenskom intervali  $[0, T]$ .