SVEUČILIŠTE U RIJECI, FAKULTET ZA FIZIKU

Diplomski studij Inženjerstvo i fizika materijala

Ak. god. 2021./2022.

TEORIJSKA FIZIKA I PRIMJENE II

Prvi kolokvij 21. 4. 2022.

1. Zadana je valna funkcija oblika

$$\psi(x) = \mathrm{e}^{-\alpha|x|}$$

gdje je $\alpha > 0$.
(a) Normalizirajte valnu funkciju.
(b) Izračunajte vjerojatnost da se čestica koja je opisana pomoću $\psi(x)$ nalazi desno od $x = 1$.
(c) Izračunajte prosječnu vrijednost operatora položaja x i kinetičke energije $p^2/2m$ za $m = 1$.

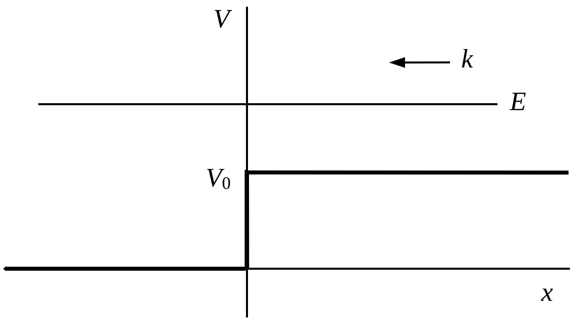
2. Pokažite da je za jednodimenzionalni harmonijski oscilator prosječna vrijednost operatora položaja x i prosječna vrijednost operatora impulsa p jednaka nuli u bilo kojem stacionarnom stanju.
***Uputa*:** prisjetite se parnosti valnih funkcija.

3. Čestica je opisana u trenutku $t = 0$ valnom funkcijom

$$\psi(x,0) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2a}}, & |x| \le a \\ 0, & x > a \end{cases}$$

Izračunajte vjerojatnost da čestica ima impuls iz intervala $[-\hbar/a, \hbar/a]$.

4. Čestica mase m upada zdesna na potencijal u obliku stepenice (step-potencijal). Visina stepenice je V_0 , a čestica ima energiju $E > V_0$ koja odgovara valnom vektoru k.
(a) Riješite stacionarnu Schrödingerovu jednadžbu za ovaj problem.
(b) Izračunajte koeficijent refleksije i usporedite ga s koeficijentom refleksije kod sličnog problema u kojem čestica na step-potencijal upada slijeva.



$\boxed{1.}$

(a) $$\psi(x) = A e^{-\alpha|x|} = A \begin{cases} e^{-\alpha x}; & x > 0 \\ e^{\alpha x}; & x < 0 \end{cases}$$

Normalizacija: $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1$

$$|A|^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{0} e^{2\alpha x} dx}_{\frac{e^{\alpha x}}{2\alpha}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2\alpha}} + |A|^2 \underbrace{\int_{0}^{\infty} e^{-2\alpha x} dx}_{\frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{2\alpha}} = 1$$

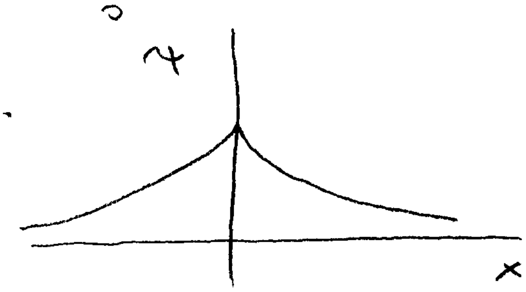
$$\frac{2}{2\alpha} |A|^2 = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\alpha}$$

(b) $$W = \alpha \int_{1}^{\infty} e^{-2\alpha x} dx = \alpha \cdot \frac{e^{-2\alpha x}}{-2\alpha}\Big|_{1}^{\infty} = \frac{1}{2} e^{-2\alpha}$$

(c) $$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi|^2 dx = \alpha \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x e^{2\alpha x} dx}_{y = -x} + \alpha \int_{0}^{\infty} x e^{-2\alpha x} dx$$

$$= (-1)\alpha \int_{0}^{\infty} y e^{-2\alpha y} dy + \alpha \int_{0}^{\infty} x e^{-2\alpha x} dx = 0$$

To se moglo zaključiti i po tome što je $\psi(x)$ parna funkcija

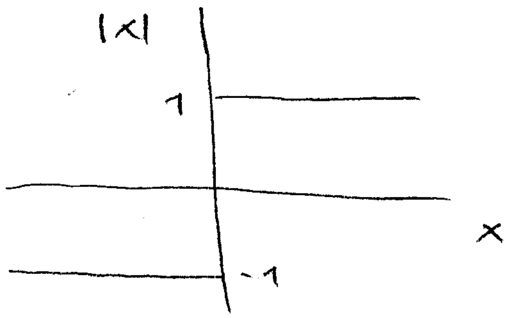


Za izračun prosječne vrijednosti kinetičke energije potrebno je izračunati

$$\frac{d^2}{dx^2}|x|$$

Prva derivacija

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{d}{dx}\begin{cases} x, & x>0 \\ -x, & x<0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$



Druga derivacija: za računanje 1. derivacije potrebna je step funkcija

$$\frac{d}{dx}|x| = 2\Theta(x)-1$$

gdje je

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1; & x>0 \\ 0; & x<0 \end{cases}$$

No, derivacija step-funkcije je delta funkcija

$$\Theta'(x) = \delta(x)$$

Imamo

$$\frac{d^2}{dx^2}|x| = 2\delta(x)$$

Sve skupa

$$\frac{1}{2m}p^2\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\alpha}\cdot e^{-\alpha|x|}\cdot(-\alpha)\underbrace{\frac{d}{dx}|x|}_{(2\Theta(x)-1)}\right)$$

$$= \frac{\hbar^2\alpha}{2m}\sqrt{\alpha}\,\frac{d}{dx}\left[e^{-\alpha|x|}\cdot(2\Theta(x)-1)\right]$$

$$\frac{1}{2m} p^2 \psi = \frac{\hbar^2 \alpha}{2m} \sqrt{\alpha} \left(e^{-\alpha|x|} \cdot (-\alpha) \overbrace{\left(\frac{d}{dx}|x|\right)}^{2\theta(x)-1} \cdot (2\theta(x)-1) + e^{-\alpha|x|} \cdot 2\delta(x) \right]$$

$$= \frac{\hbar^2 \alpha}{2m} \sqrt{\alpha} \cdot \left[-\alpha e^{-\alpha|x|} \cdot \underbrace{(2\theta(x)-1)^2}_{4\theta^2 - 4\theta(x) + 1} + e^{-\alpha|x|} \cdot 2\delta(x) \right]$$

$$\theta^2(x) = \theta(x)$$

$$= \frac{\hbar^2 \alpha}{2m} \sqrt{\alpha} \left[-\alpha e^{-\alpha|x|} + 2 e^{-\alpha|x|} \delta(x) \right]$$

Prosječna vrijednost

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* p^2 \psi \, dx$$

$$= \frac{\hbar^2 \alpha}{2m} \cdot \alpha \cdot \left[-\alpha \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha|x|} dx}_{\frac{1}{\alpha}} + 2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha|x|} \delta(x) dx}_{=1} \right.$$

$$= \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} \left[-1 + 2 \right]$$

$$= \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m}$$

2.

Potencijalna energija harmoničkog oscilatora je parna. Stanja su parna ili neparna.

$$\langle \psi | x | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \underbrace{|\psi|^2}_{\text{neparna funkcija}} dx = 0$$

$$\langle p \rangle = m \frac{d\langle x \rangle}{dt} = 0$$

3.

Impulsna valna funkcija je Fourierov transformat za $\psi(x,0)$

$$\Phi(p,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-a}^{a} e^{-ipx/\hbar}\, \psi(x,0)\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2a}} \underbrace{\int_{-a}^{a} e^{-ipx/\hbar}\, dx}$$

$$\frac{e^{-ipx/\hbar}}{-ip/\hbar}\Big|_{-a}^{a} = \frac{1}{-ip/\hbar} \cdot \left(e^{-ipa/\hbar} - e^{ipa/\hbar}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{\pi a}} \cdot \frac{1}{p} \cdot \underbrace{\frac{1}{2i}\left(e^{ipa/\hbar} - e^{-ipa/\hbar}\right)}_{\sin\left(\frac{pa}{\hbar}\right)}$$

Gustoća vjerojatnosti $\rho(p) = |\Phi(p)|^2$

$$= \frac{\hbar}{\pi a} \cdot \frac{1}{p^2} \sin^2\left(\frac{pa}{\hbar}\right)$$

Vjerojatnost

$$w = \int_{-\hbar/a}^{\hbar/a} |\Phi(p)|^2\, dp = \frac{\hbar}{\pi a} \cdot \int_{-\hbar/a}^{\hbar/a} \frac{\sin^2\left(\frac{pa}{\hbar}\right)}{p^2}\, dp$$

$$\eta = p\frac{a}{\hbar}$$

$$w = \frac{\hbar}{\pi a} \cdot \frac{a}{\hbar} \cdot \int_{-1}^{1} \frac{\sin^2(\eta)}{\eta^2}\, d\eta = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{1} \frac{\sin^2(\eta)}{\eta^2}\, d\eta$$

$$= 0{,}571$$

$\boxed{1.}$

Rješavamo Schrödingerovu jednadžbu

$\boxed{x>0}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dx^2}+V_0 u = Eu$$

$$u'' + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)}_{\ell} u = 0$$

$E > V_0 > 0$

Rješenje: $$u_> = \underbrace{A}_{\text{upadni val}} e^{-i\ell x} + \underbrace{B e}_{\text{reflektirani val}}^{i\ell x}$$

$\boxed{x>0}$

$$u'' + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}E}_{K^2} = 0$$

Rješenje:

$$u_< = C e^{-iKx}$$

Rubni uvjeti: 1. $u_> = u_< \Big|_{x=0}$

2. $u_>' = u_<' \Big|_{x=0}$

Uzmemo li da je upadni snop normiran na jedinicu, $A=1$

1. $1 + B = C$

2. $-i\ell + i\ell B = -iK C$

$$-i\ell + i\ell B = -iK(B+1)$$

$$i(K+\ell)B = i(\ell-K)$$

$$B = \frac{\ell-K}{\ell+K}$$

$$C = \frac{\varrho - K}{\varrho + K} + 1 = \frac{2\varrho}{K+\varrho}$$

Koeficijent refleksije

$$R = \frac{j_r}{j_u} = \frac{\frac{\hbar K}{2m}|B|^2}{\frac{\hbar K}{2m}|A|^2} = \left|\frac{\varrho - K}{\varrho + K}\right|^2$$

Isti je kao i kad čestica upada na potencijalni skok s lijeva.